Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

7. januar 2014

Primer

Izračunajmo

- $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x-1)dx$
- $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^3}dx$

Tudi v določeni integral lahko vpeljemo novo spremenljivko.

Izrek

Naj bo $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *zvezno odvedljiva funkcija, torej* u' *zvezna funkcija, in naj bo* f *zvezna funkcija na zalogi vrednosti funkcije* u. *Potem je*

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$$

Primer

$$\int_0^1 e^{x^2+1} x dx$$

Prav tako lahko uporabimo pri računanju določenih integralov tudi metodo per partes.

Izrek

Če sta f in g odvedljivi funkciji na intervalu $[a, b]$, potem velja

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

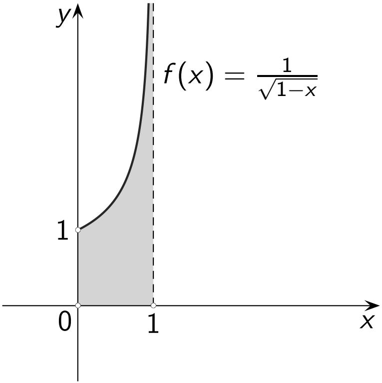
Primer

Izračunajmo

$$\int_0^1 e^{x+1}xdx.$$

Posplošeni integral

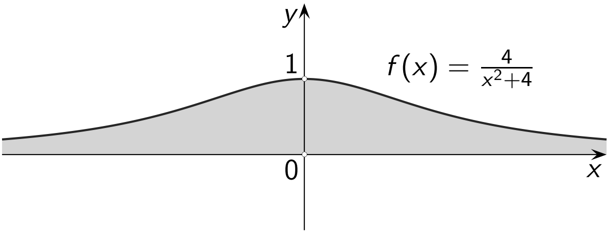
Oglejmo si, kako lahko posplošimo definicijo določenega integrala v primeru, ko je funkcija f neomejena, in v primeru, ko je interval, po katerem integriramo funkcijo f, neomejen.



y
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
1
0
1
x

Če funkcija f v enem izmed krajišč intervala $[a, b]$, na primer v b, ni omejena, obstaja pa integral na vsakem manjšem intervalu in obstaja tudi limita, potem pišemo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx.$$


y
1
$f(x) = \frac{4}{x^2+4}$
0
x

Če je funkcija f integrabilna na vsakem končnem intervalu in obstaja tudi limita, ko meje intervala poljubno povečamo, potem pišemo

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^{M} f(x)dx.$$

Primer

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+2} dx$$

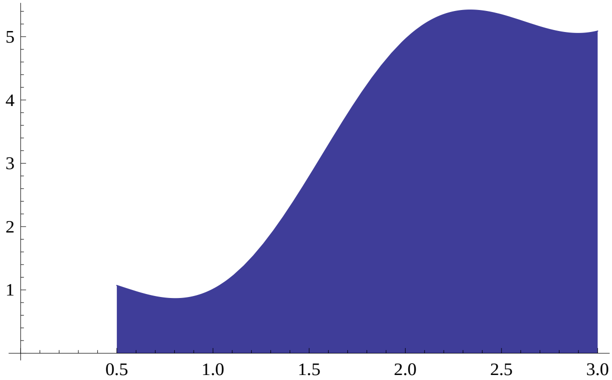
Uporaba določenega integrala v geometriji

- Izračun ploščine krivočrtnega lika

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pozitivna integrabilna funkcija. Potem je po definiciji določenega integrala

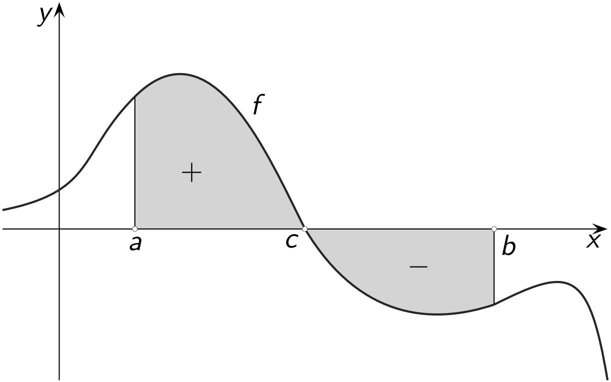
$$\int_a^b f(x)dx$$

ravno ploščina med abscisno osjo in grafom funkcije f na intervalu $[a, b]$.



5
4
3
2
1
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0

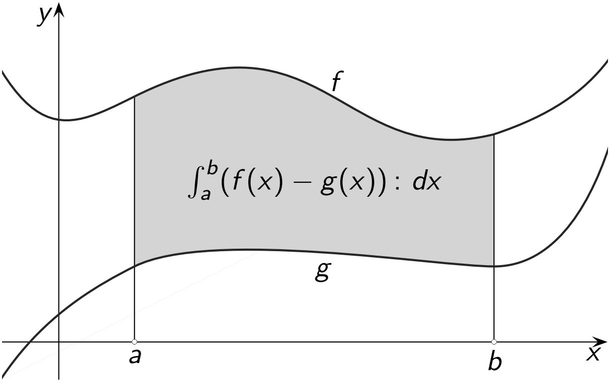
Če integrabilna funkcija $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ ni povsod pozitivna, potem interval $[a, b]$ razdelimo na taki podmnožici, da je na eni podmnožici funkcija nenegativna in na drugi negativna. Ploščina med abscisno osjo in grafom funkcije f je potem vsota integrala funkcije f na prvi podmnožici in integrala funkcije f na drugi podmnožici pomnoženega z -1.



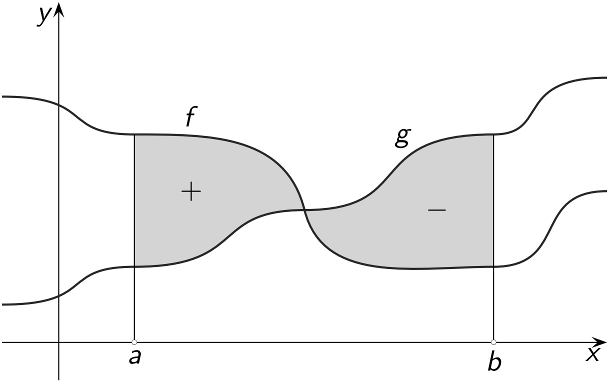
y
f
+
a
c
b
x
−

Naj bosta $g, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilni funkciji in naj bo $f(x) \geq g(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Potem je ploščina območja med grafoma funkcij f in g na intervalu $[a, b]$ enaka

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$


y
f
$\int_a^b (f(x) - g(x))\: dx$
g
a
b
x

Če $f(x)$ ni več od $g(x)$ za vsak x, potem, podobno kot prej, razdelimo interval $[a, b]$ na dve podmnožici in nato na podmnožici, kjer je $f(x) < g(x)$, integral pomnožimo z -1.



y
f
g
+
−
a
b
x

Primer

Izračunajmo ploščino kroga.