Matematika 1

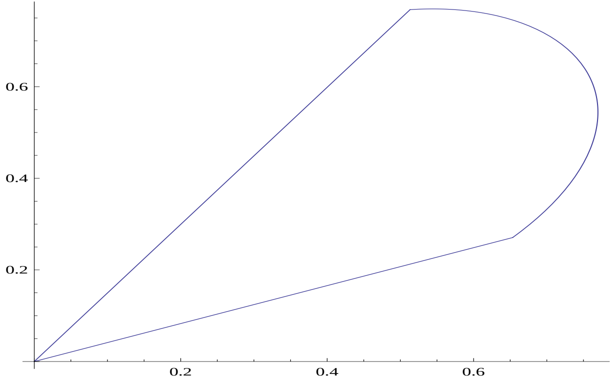
Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

9. januar 2014

- Ploščina izseka do krivulje v polarni obliki

Naj bo $r = r(\varphi)$ sklenjena krivulja, podana v polarni obliki za $\varphi \in [\alpha, \beta]$.



Zanima nas ploščina območja, omejenega s krivuljo $r = r(\varphi)$ in poltrakoma $\varphi = \alpha$ ter $\varphi = \beta$.
Kot od kota α do kota β razdelimo na n manjših kotov od φ_{k-1} do φ_k, pri čemer je $\varphi_0 = \alpha$ in $\varphi_n = \beta$.
Če so koti $\varphi_k - \varphi_{k-1}$ dovolj majhni, potem je $r(\varphi_{k-1}) \doteq r(\varphi_k)$ in ploščina izseka do krivulje $r = r(\varphi)$ je približno enaka ploščini krožnega izseka s polmerom $r(\varphi_k)$ in kotom $\varphi_k - \varphi_{k-1}$, torej

$$\frac{1}{2}(r(\varphi_k))^2(\varphi_k - \varphi_{k-1}).$$

Definiramo integralsko vsoto

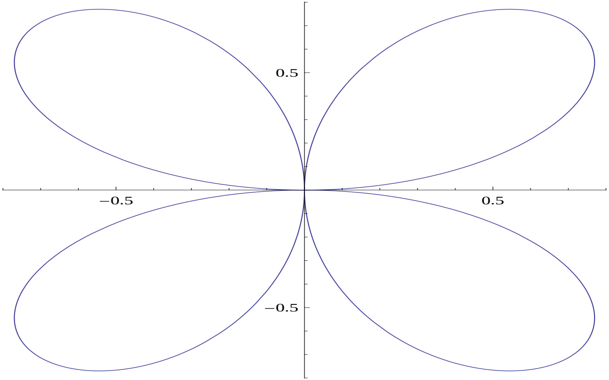
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(r(\varphi_k))^2(\varphi_k - \varphi_{k-1})$$

in pogledamo, koliko je limita integralskih vsot, ko gre $n \to \infty$ in $\varphi_k - \varphi_{k-1} \to 0$ za vsak k.
Če limita obstaja, potem je ploščina enaka

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} (r(\varphi))^2 d\varphi.$$

Primer

Izračunajmo ploščino območja, omejenega s krivuljo $r(\varphi) = \sin(2\varphi)$.



Opomba

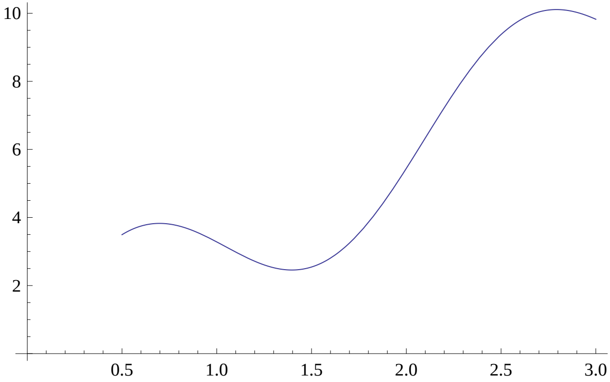
Ker je $x = r\cos\varphi$ in $y = r\sin\varphi$, je $dx = dr\cos\varphi - r\sin\varphi d\varphi$ in $dy = dr\sin\varphi + r\cos\varphi d\varphi$.
Izračunamo $xdy - ydx$ in dobimo, da je

$$\frac{1}{2}(xdy - ydx) = \frac{1}{2}r^2 d\varphi.$$

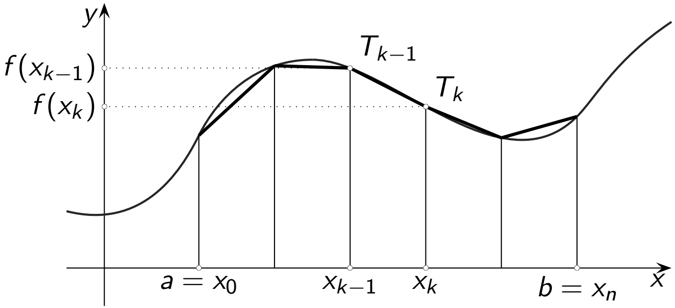
Izraz $\frac{1}{2}(xdy - ydx)$ imenujemo diferencial ploščine in je enak ploščini krivočrtnega trikotnika s koordinatami $(0,0)$, (x,y) in $(x+dx, y+dy)$.

- Ločna dolžina krivulje

Naj bo krivulja podana z zvezno odvedljivo funkcijo $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.



Zanima nas dolžina krivulje od točke $(a, f(a))$ do točke $(b, f(b))$. Na krivulji si izberemo točke $T_k(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \ldots, n$, pri čemer je $x_0 = a$ in $x_n = b$.



Točke povežemo z daljicami in dobimo poligonsko črto, katere dolžina je po Pitagorovem izreku enaka

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Dolžina

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

je tem boljši približek dolžine krivulje, čim krajše so razdalje med točkami T_{k-1} in T_k.
Razliko $f(x_k) - f(x_{k-1})$ s pomočjo Lagrangeovega izreka zapišemo na naslednji način

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

kjer je $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$.

Sledi, da je

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}))^2}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,(x_k - x_{k-1})$$

Definiramo integralsko vsoto

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\,(x_k - x_{k-1})$$

in pogledamo, koliko je limita integralskih vsot, ko gre $n \to \infty$ in $x_k - x_{k-1} \to 0$ za vsak k.
Če limita obstaja, potem je dolžina krivulje enaka

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Zapišimo $s = \int_a^x \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$.
Potem je $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$.
Zapišemo lahko $y' = \frac{dy}{dx}$, torej

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Če je krivulja podana v parametrični obliki, torej $x = x(t)$ in $y = y(t)$, potem je

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

oziroma

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2.$$

Ker je

$$ds = \dot{s}\,dt = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt,$$

je dolžina parametrično podane krivulje enaka

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt.$$

Če pa je krivulja podana v polarni obliki $r = r(\varphi)$, potem je $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ in

$$\frac{dx}{d\varphi} = r'\cos\varphi - r\sin\varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = r'\sin\varphi + r\cos\varphi.$$

Sledi

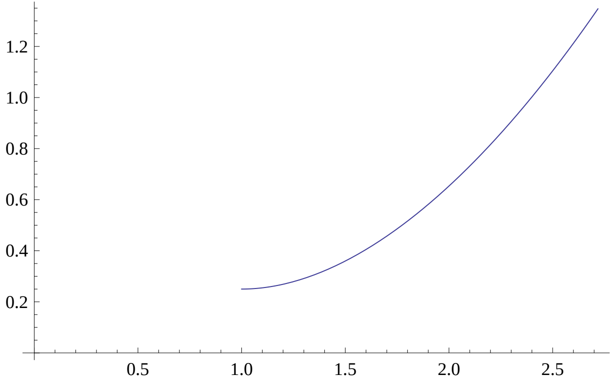
$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}d\varphi = \sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi,$$

torej

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}d\varphi.$$

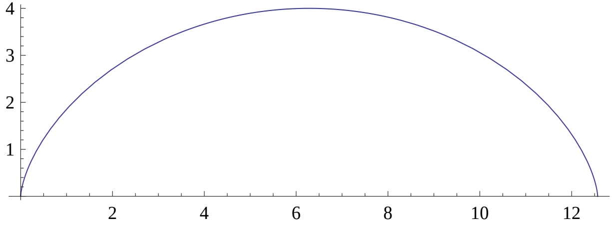
Primer

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log x,\ x_1 = 1,\ x_2 = e.\ \left(s = \frac{e^2+1}{4}\right).$$



Primer

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - cost),\ t_1 = 0,\ t_2 = 2\pi.\ (s = 8a).$



Primer

$r = a(1 - \cos\varphi)$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$. $(s = 8a)$.