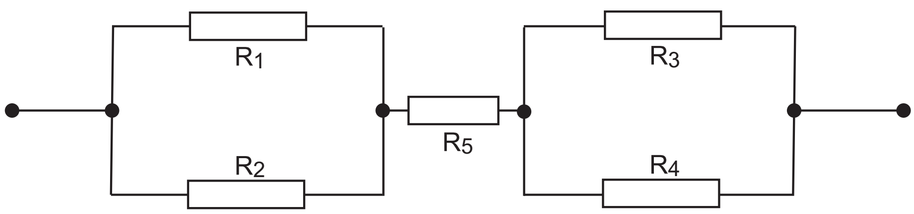
MATEMATIKA I (Vaje)

Uporaba Matematike I v elektrotehniki

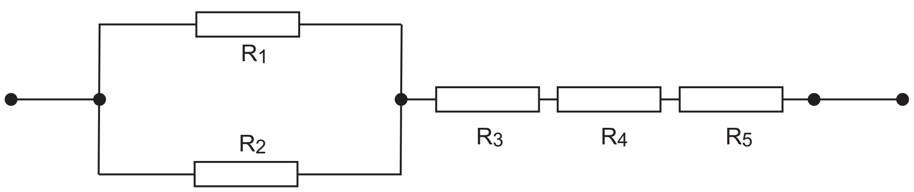
Avtorica: Melita Hajdinjak
Datum: avgust 2007

1 ENAČBE IN NEENAČBE

1. [OSNOVE ELEKTROTEHNIKE] Poiščite izraz za nadomestno upornost naslednjega mostičnega vezja.

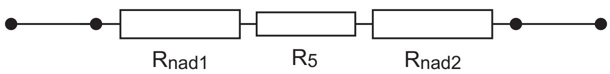


Kakšnemu pogoju morata zadoščati upornosti R_3 in R_4, da bo nadomestna upornost zgornjega vezja enaka nadomestni upornosti spodnjega vezja?



REŠITEV:

Nadomestno vezje prvega mostiďż˝nega vezja izgleda takole:



Pri tem delna nadomestna upornosta R_{nad1} pripada vzporedno vezanima uporoma R_1 in R_2, delna nadomestna upornost R_{nad2} pa vzporedno vezanima uporoma R_3 in R_4. Dobimo

$$R_{nad1} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2},$$

$$R_{nad2} = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)^{-1} = \frac{R_3 + R_4}{R_3 R_4},$$

in nadomestna upornost prvega mostiďż˝nega vezja je enaka

$$R_{nad} = R_{nad1} + R_5 + R_{nad2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} + R_5 + \frac{R_3 + R_4}{R_3 R_4} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + R_5.$$

Nadomestna upornost drugega mostičnega vezja pa je enaka

$$R_{nad} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + R_3 + R_4 + R_5.$$

Obe vezji imata isto nadomestno upornost, ko velja

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + R_5 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + R_3 + R_4 + R_5$$

oziroma

$$\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = R_3 + R_4.$$

Sledi

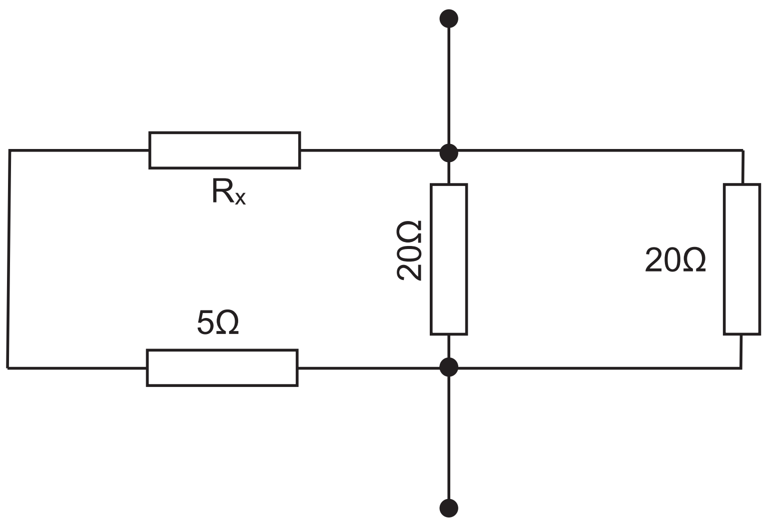
$$R_3 + R_4 = (R_3 + R_4) \cdot R_3 R_4,$$

$$(R_3 + R_4)(1 - R_3 R_4) = 0,$$

in edina rešitev te enačbe

$$R_4 = \frac{1}{R_3}.$$

2. [OSNOVE ELEKTROTEHNIKE] Poiščite vrednosti upora R_x, pri katerih je nadomestna upornost naslednjega vezja manjša kot 8Ω in večja ali enaka kot 4Ω.



REŠITEV:

Nadomestno upornost R_{nad} določa enačba

$$\frac{1}{R_{nad}} = \frac{1}{5+R_x} + \frac{1}{20} + \frac{1}{20},$$

iz katere sledi

$$R_{nad} = \frac{10R_x + 50}{R_x + 15}.$$

Nadomestna upornost mora zadoščati neenačbi $4\Omega \leq R_{nad} < 8\Omega$ oziroma

$$4 \leq \frac{10R_x + 50}{R_x + 15} < 8.$$

Rezultat neenačbe je

$$1,67\Omega \approx \frac{5}{3}\Omega \leq R_x < 35\Omega.$$

3.

2 KOMPLEKSNA ŠTEVILA

1. [RAZPOZNAVANJE SLIK] Rezultat razčlenjevanja digitalne slike na področja v ravnini pogosto zapišemo s seznamom točk obrisa področja. Naj bodo

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{S-1}, y_{S-1})$$

točke obrisa nekega področja digitalne slike. Te lahko opišemo s periodično funkcijo s predpisom

$$d(s) = x_s + iy_s,$$

katere definicijsko območje je množica naravnih števil $\{0, 1, \ldots, S-1\}$, zaloga vrednosti pa so kompleksna števila. Realna komponenta funkcijske vrednosti $d(s)$ se ujema z x koordinato, imaginarna komponenta pa z y koordinato točke (x_s, y_s) obrisa, ki jo opisujemo.

Ko želimo področje samodejno razvrstiti, obris področja opišemo z določenim številom skalarnih vrednosti, ki jih uredimo v vektorje *značilk*. Značilke imenujemo tiste lastnosti objektov, s katerimi lahko objekte zgoščeno opišemo in na podlagi katerih se objekti hkrati tudi dobro medsebojno razlikujejo. Pomemben primer značilk obrisa področja so koeficienti diskretne Fourierjeve transformiranke:

$$F(n) = \frac{1}{S} \sum_{s=0}^{S-1} d(s) e^{-2\pi i \frac{ns}{S}}, \quad n = 0, 1, \ldots, S-1.$$

Vzemite točke oglišč obrisa kvadrata v ravnini,

$$(1,1), (2,1), (2,2), (1,2),$$

in izračunajte vse štiri koeficiente diskretne Fourierjeve transformiranke.

REŠITEV:

$$\begin{aligned}
d(0) &= 1+i \\
d(1) &= 2+i \\
d(2) &= 2+2i \\
d(3) &= 1+2i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(0) &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{s=0}^{3} d(s)e^{-2\pi i\frac{0\cdot s}{4}} = \tfrac{1}{4}(d(0)+d(1)+d(2)+d(3)) = \tfrac{1}{4}(6+6i) = \tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}i \\
F(1) &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{s=0}^{3} d(s)e^{-2\pi i\frac{1\cdot s}{4}} = \tfrac{1}{4}(d(0)+d(1)e^{-\frac{\pi}{2}i}+d(2)e^{-\pi i}+d(3)e^{-\frac{3\pi}{2}i}) \\
&= \tfrac{1}{4}((1+i)-(2+i)i-(2+2i)+(1+2i)i) = -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i \\
F(2) &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{s=0}^{3} d(s)e^{-2\pi i\frac{2\cdot s}{4}} = \tfrac{1}{4}(d(0)+d(1)e^{-\pi i}+d(2)e^{-2\pi i}+d(3)e^{-3\pi i}) \\
&= \tfrac{1}{4}((1+i)-(2+i)+(2+2i)-(1+2i)) = 0 \\
F(3) &= \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{s=0}^{3} d(s)e^{-2\pi i\frac{3\cdot s}{4}} = \tfrac{1}{4}(d(0)+d(1)e^{-\frac{3\pi}{2}i}+d(2)e^{-3\pi i}+d(3)e^{-\frac{9\pi}{2}i}) \\
&= \tfrac{1}{4}((1+i)+(2+i)i-(2+2i)-(1+2i)i) = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i
\end{aligned}$$

2. [OBDELAVA SIGNALOV] Kompleksni spekter $F(\omega)$ (Fourierjeva transformacija) signala $f(t)$ je kompleksna funkcija frekvence ω, ki jo lahko predstavimo v kartezični ali polarni obliki. Kartezični zapis je

$$F(\omega) = C(\omega) + iD(\omega),$$

kjer sta $C(\omega)$ in $D(\omega)$ realni funkciji frekvence ω, imenovani *realni spekter* in *imaginarni spekter* signala $f(t)$. Polarni zapis je

$$F(\omega) = |F(\omega)|e^{i\theta(\omega)},$$

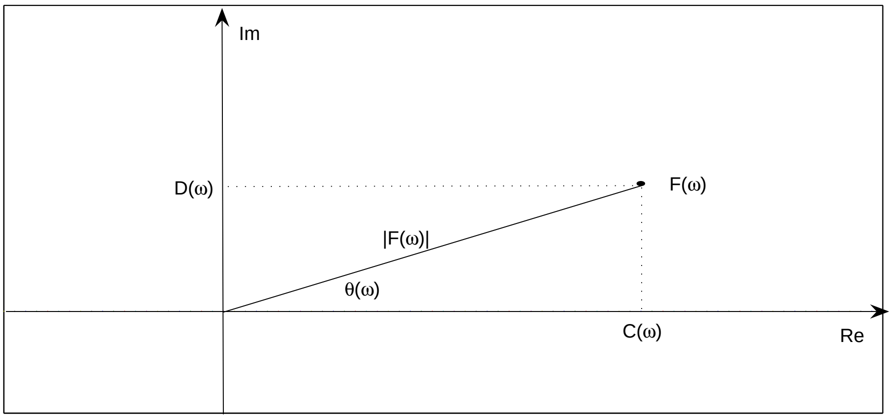
kjer sta $|F(\omega)|$ in $\theta(\omega)$ realni funkciji frekvence ω, imenovani spekter *amplitudne gostote* in *fazni spekter* signala $f(t)$.

Vrednost kompleksnega spektra $F(\omega)$ je kompleksno število in jo lahko predstavimo kot točko v kompleksni ravnini, kjer sta $C(\omega)$ in $D(\omega)$ odseka na realni in imaginarni osi, $|F(\omega)|$ in $\theta(\omega)$ pa oddaljenost od izhodišča in fazni kot. Fazni kot $\theta(\omega)$ je definiran kot kot med pozitivno smerjo abscisne osi in zveznico med koordinatnim izhodiščem in točko $F(\omega)$.

Spekter amplitudne gostote $|F(\omega)|$ podaja amplitudno gostoto sinusnega nihanja $e^{i\omega t}$ pri frekvenci ω, ki je vsebovana v signalu $f(t)$, fazni spekter $\theta(\omega)$ pa njegov fazni zamik.

Določite realni in imaginarni spekter ter spekter amplitudne gostote in fazni spekter, ki pripadajo kompleksnemu spektru

$$F(\omega) = \frac{a - i\omega}{a^2 + \omega^2}$$



signala

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases},$$

pri pozitivnem realnem številu a.

REŠITEV:

$$C(\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2}$$

$$D(\omega) = -\frac{\omega}{a^2 + \omega^2}$$

$$|F(\omega)| = \sqrt{C(\omega)^2 + D(\omega)^2} = \sqrt{\frac{a^2+\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}$$

$$\theta(\omega) = \arctan\frac{D(\omega)}{C(\omega)} = \arctan(-\tfrac{\omega}{a}) = -\arctan\tfrac{\omega}{a} \quad (\text{ker } C(\omega) > 0)$$

3. [ELEKTRIČNA IN MEHANSKA VEZJA] Frekvenčni odziv stabilnega sistema določimo, tako da na vhod sistema pripeljemo sinusne signale različnih frekvenc in primernih amplitud ter počakamo, da prehodni pojav odziva izzveni. Na izhodu iz sistema opazujemo (merimo) izhodni signal. Za linearne sisteme velja, da se frekvenca nihanja vhodnega signala na izhodu ohranja, spremeni pa se lahko amplituda in fazni zasuk signala. Pri frekvenčnem odzivu sistema opazujemo ravno te spremembe – amplitudo in fazni zasuk. Rezultate meritev, tj. frekvenčno karakteristiko, odzivov vzbujanja sistema s sinusnimi signali pogosto prikažemo z *Bodejevim diagramom.*

   Bodejev diagram se deli na dva dela – amplitudni in fazni diagram. Oba določimo, tako da prenosno funkcijo $G(s)$ sistema preoblikujemo v logaritmirano eksplicitno izraženo enosmerno ojačenje sistema

$$L(\omega) = 20\log_{10}|G(i\omega)|,$$

tako dobljeno funkcijo kompleksne spremenljivke pa zapišemo (v skladu z lastnostmi logaritemske funkcije) kot vsoto, katerih sumande tedaj rišemo posebej in jih šele na diagramu seštejemo. Ojačenje sistema $L(\omega)$ je izraženo v decibelih.

Če je prenosna funkcija enaka

$$G(s) = \frac{K(s-n_1)(s^2+as+b)}{(s-p_1)(s^2+cs+d)},$$

ustrezna preobrazba v enosmerno ojačenje sistema pa

$$G(i\omega) = \frac{K_s(1+\frac{i\omega}{-n_1})(1+\frac{-\omega^2}{b}+\frac{a}{b}i\omega)}{(1+\frac{i\omega}{-p_1})(1+\frac{-\omega^2}{d}+\frac{ic\omega}{d})},$$

potem velja

$$\begin{aligned}
20\log_{10}|G(i\omega)| &= 20\log_{10}|\tfrac{K_s(1+\frac{i\omega}{-n_1})(1+\frac{-\omega^2}{b}+\frac{a}{b}i\omega)}{(1+\frac{i\omega}{-p_1})(1+\frac{-\omega^2}{d}+\frac{ic\omega}{d})}| \\
&= 20\big(\log_{10}|K_s| + \log_{10}|1+\tfrac{i\omega}{-n_1}| + \log_{10}|1+\tfrac{-\omega^2}{b}+\tfrac{a}{b}i\omega| - \\
&- \log_{10}|1+\tfrac{i\omega}{-p_1}| - \log_{10}|1+\tfrac{-\omega^2}{d}+\tfrac{ic\omega}{d}|\big) \\
&= L(\omega).
\end{aligned}$$

Prenosna funkcija primera vezja (RC sistem; upornost $R = 100\,\Omega$ in kapacitivnost kondenzatorja $C = 0.001$ F) pri napetostnem vzbujanju in pretečenem naboju skozi kondenzator kot izhodu je enaka

$$G(s) = \frac{0.001}{0.1s+1}.$$

Ko spremenljivko s zamenjamo z $i\omega$ in funkcijo ustrezno preoblikujemo, dobimo

$$G(i\omega) = \frac{0.001}{\frac{i\omega}{10}+1}.$$

Izračunajte ojačenje $L(\omega)$ ter narišite amplitudni Bodejev diagram.

REŠITEV:

$$\begin{aligned}
L(\omega) &= 20\log_{10}|G(i\omega)| = 20\log_{10}|\frac{0.001}{\frac{i\omega}{10}+1}| = 20\big(\log_{10}0.001 - \log_{10}|\frac{i\omega}{10}+1|\big) \\
&= -60 - 20\log_{10}|\tfrac{i\omega}{10}+1| = -60 - 20\log_{10}\sqrt{(\tfrac{\omega}{10})^2+1} = \\
&= -60 - 20\log_{10}\tfrac{\sqrt{100+\omega^2}}{10} = -60 - 20\cdot\tfrac{1}{2}\log_{10}(100+\omega^2) + 20 = \\
&= -40 - 10\log_{10}(100+\omega^2)
\end{aligned}$$

Za Bodejev diagram moramo narisati dva člena – linearni člen -40 in logaritemski člen $-10\log_{10}(100+\omega^2)$. Oba člena in njun seštevek prikazuje spodnji Bodejev diagram, katerega abscisna os ima logaritemsko skalo.