Matematika 1

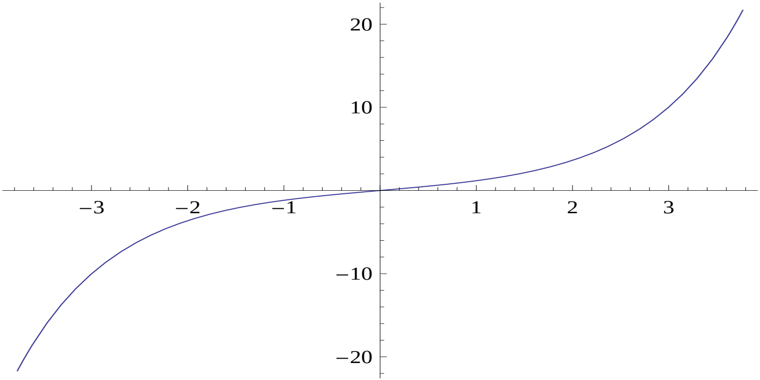
Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

21. november 2013

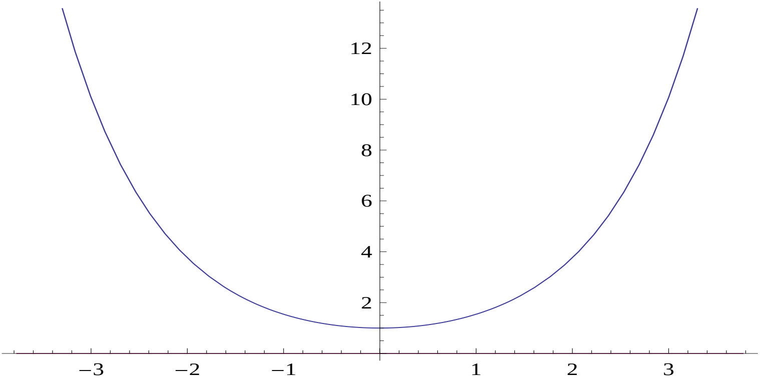
Hiperbolične funkcije Hiperbolični sinus

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



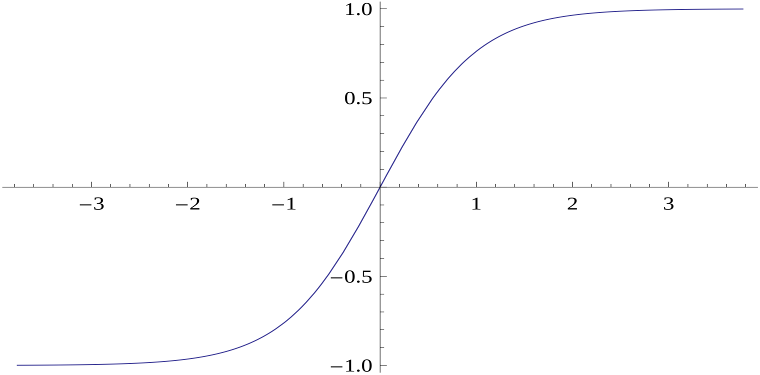
hiperbolični kosinus

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



in hiperbolični tangens

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



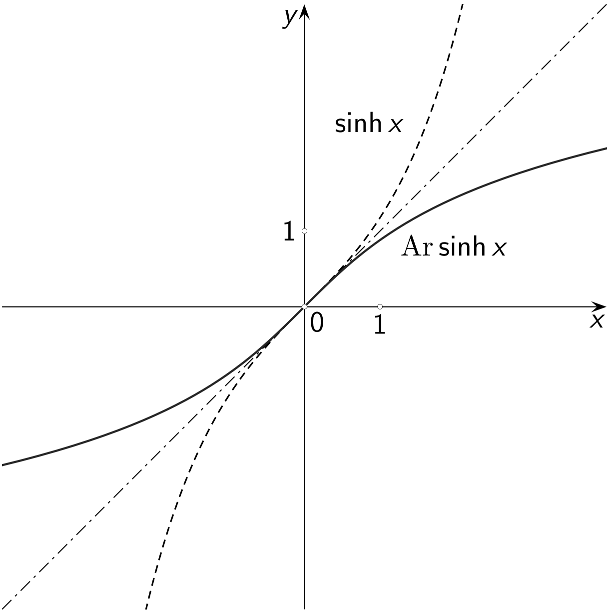
Za hiperbolične funkcije veljajo podobne zveze, kot za kotne funkcije, na primer

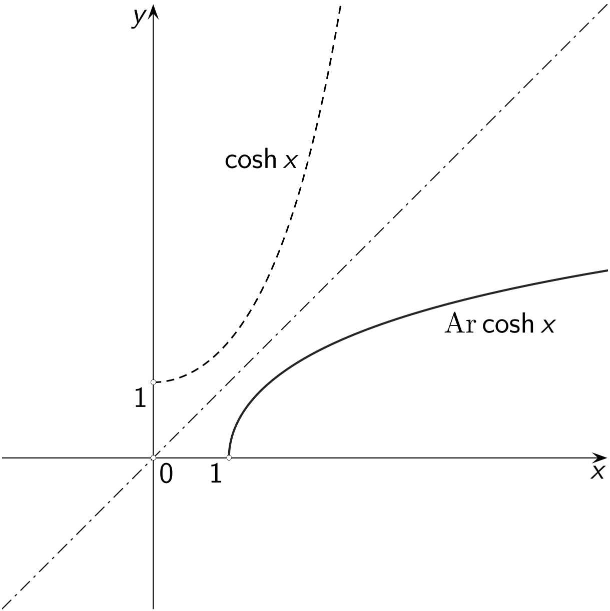
- $\sinh(2x) = 2\sinh x \cosh x$
- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Opomba

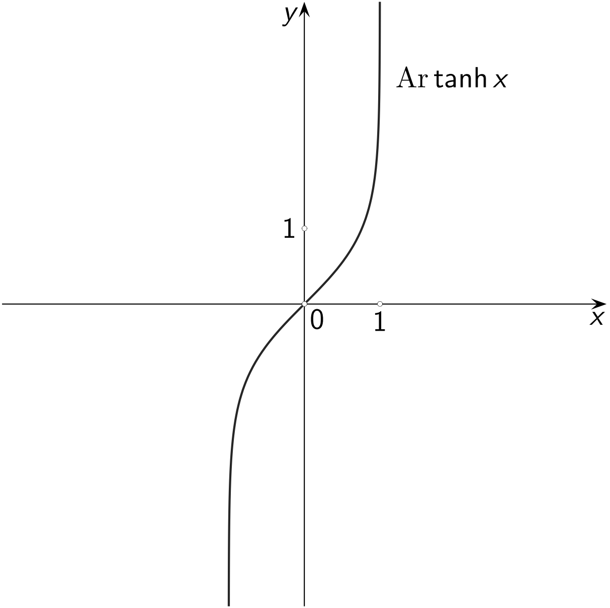
Parametrično podana krivulja $x = \cosh t$, $y = \sinh t$ je v implicitni obliki podana z enačbo $x^2 - y^2 = 1$, kar je enačba hiperbole (od tod takšno ime funkcij).

Area funkcije Tudi za hiperbolične funkcije bi radi izračunali njihov inverz.
Hiperbolični sinus in hiperbolični tangens sta strogo naraščajoči funkciji, torej injektivni, zato njuna inverza obstajata povsod.
Pri hiperboličnem kosinusu pa se omejimo na interval $[0, \infty)$, kjer je hiperbolični kosinus strogo naraščajoča funkcija.


y
sinh x
1
Ar sinh x
0
1
x



y
cosh x
Ar cosh x
1
0
1
x


y
Ar tanh x
1
0
1
x

Izračunajmo inverzno funkcijo hiperboličnega sinusa, torej funkcije $y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
Zamenjamo vlogo x in y, preoblikujemo izraz, tako da dobimo kvadratno enačbo glede na spremenljivko e^y, rešimo kvadratno enačbo in dobimo, da je le ena rešitev pravilna

$$y = \log(x + \sqrt{1 + x^2}) = \mathrm{Ar}\sinh x.$$

Podobno lahko izpeljemo area funkciji tudi za hiperbolični kosinus in hiperbolični tangens:

$$\mathrm{Ar}\cosh x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}), \ \ x \geq 1$$

$$\mathrm{Ar}\tanh x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}, \ \ |x| < 1$$

Elementarne funkcije delimo na dve veliki skupini: na algebraične funkcije in na transcendentne funkcije.

Definicija

Funkcija $y = f(x)$ je algebraična, če so njene vrednosti rešitve enačbe

$$A_n(x)y^n + A_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + A_2(x)y^2 + A_1(x)y + A_0(x) = 0,$$

kjer so A_i dani polinomi, torej
$A_i(x) = a_{i,n}x^n + a_{i,n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{i,1}x + a_{i,0}$.
Če funkcija ni algebraična, potem pravimo, da je transcendentna.

Opomba

Algebraične funkcije so z enačbo

$$A_n(x)y^n + A_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + A_2(x)y^2 + A_1(x)y + A_0(x) = 0$$

podane implicitno. V nekaterih primerih pa s tako enačbo ni definirana nobena realna funkcija.
Na primer, $y^2 + x^2 + 1 = 0$.

Primeri algebraičnih funkcij:

- Če je $A_i(x) = 0$ za vsak $i > 1$ in $A_1(x) = -1$, potem je $f(x) = A_0(x)$ polinom.
- Če je $A_i(x) = 0$ za vsak $i > 1$, potem je $f(x) = -\frac{A_0(x)}{A_1(x)}$ racionalna funkcija.
- Če je $A_i(x) = 0$ za vsak $i > 2$, $A_2(x) = -1$ in $A_1(x) = 0$, potem je med rešitvami enačbe $-y^2 + A_0(x) = 0$ tudi kvadratni koren polinoma $f(x) = \sqrt{A_0(x)}$.

Od obravnavanih funkcij so:

- algebraične funkcije: polinomi, racionalne funkcije in kvadratni koreni
- transcendentne funkcije: eksponentne, logaritemske, kotne, ciklometrične, hiperbolične in area funkcije

Limita funkcij

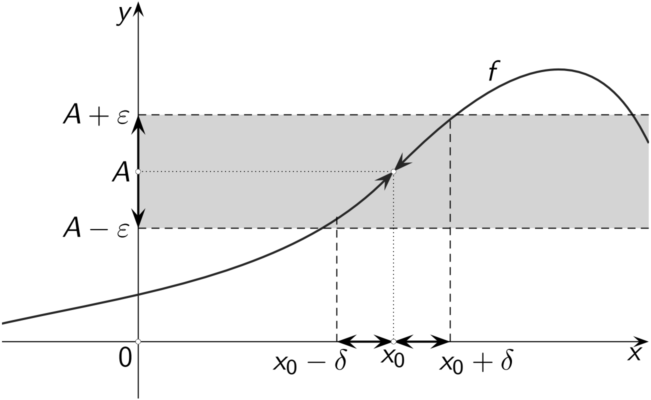
Definicija

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Število A je limita funkcije f v točki $x_0 \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za vsak $x \neq x_0$, za katerega je $|x - x_0| < \delta$.
To pišemo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

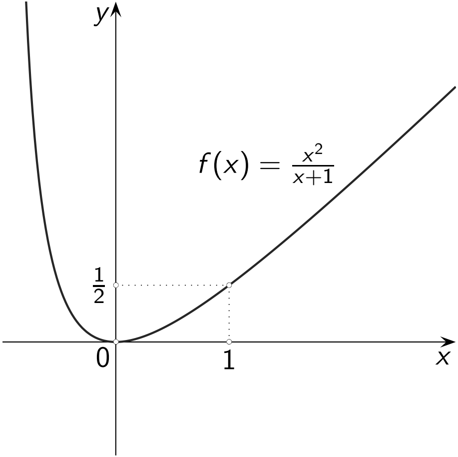

y
f
$A+\varepsilon$
A
$A-\varepsilon$
0
$x_0-\delta$
x_0
$x_0+\delta$
x

Opomba

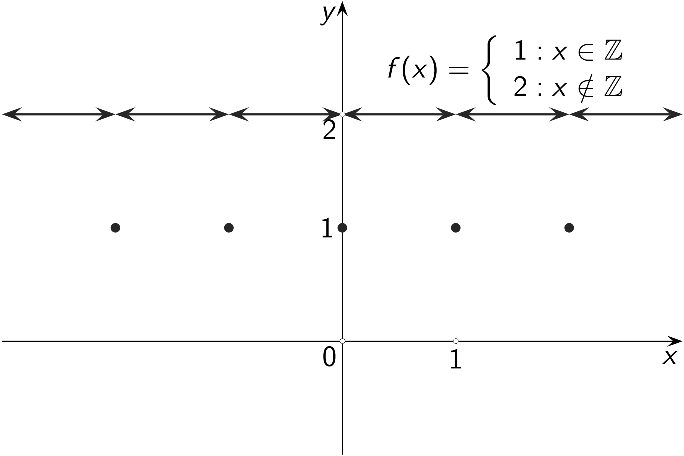
Limita funkcije f v točki x_0 ni odvisna od vrednosti funkcije f v točki x_0.
Lahko je

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ obstaja, funkcija f pa v točki x_0 ni definirana.

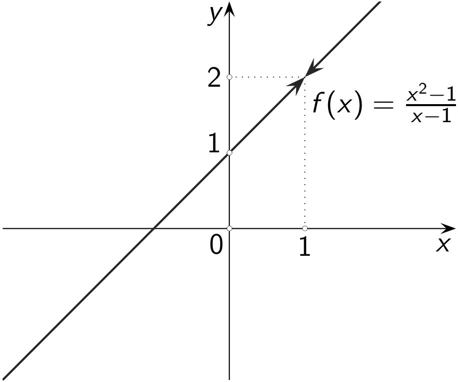
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$



$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$



$\lim_{x \to x_0} f(x)$ obstaja, funkcija f pa v točki x_0 ni definirana.



Definicija

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Število A je limita funkcije f, ko gre x proti ∞, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako število $M \in \mathbb{R}$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za vsak $x > M$.
To pišemo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Podobno definiramo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Definicija

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Pravimo, da je ∞ limita funkcije f, ko gre x proti x_0, če za vsak $M \in \mathbb{R}$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$f(x) > M$$

za vsak $x \neq x_0$ in $|x - x_0| < \delta$.
To pišemo

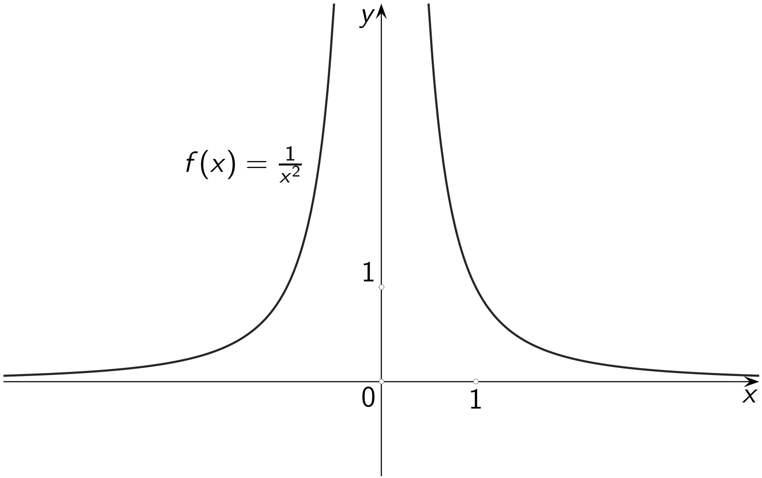
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Primer

$$\lim_{x \to \infty} \log x = \infty.$$

Primer

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty.$$



Podobno kot pri limitah zaporedij tudi pri limitah funkcij pokažemo lastnosti, ki veljajo za računanje limit.

- $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, kjer je $g(x)\neq 0$ za vsak x iz neke okolice x_0.

Izrek (sendvič izrek)

Če je

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

za vsak $x \neq x_0$ iz neke okolice x_0 in je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = A,$$

potem je tudi

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = A.$$