Matematika 1

Gregor Dolinar

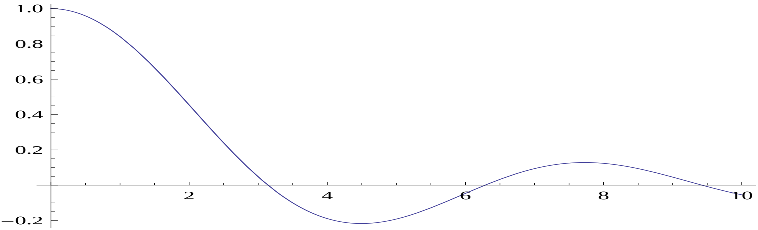
Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

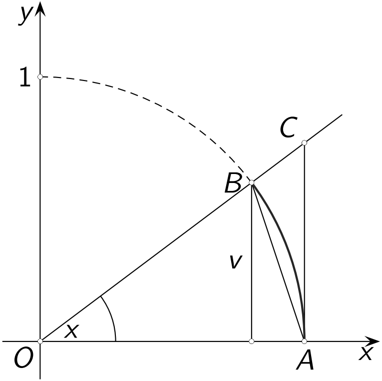
26. november 2013

Primer

Pokažimo, da je

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$





Dobimo, da je $\sin x < x < \tan x$.

Primer

Izračunajmo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(5x)}{2x^2}.$$

Pri računanju limite upoštevamo zvezo $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$

Definicija

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Število A je leva limita funkcije f v točki $x_0 \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za vsak $x < x_0$, za katerega je $x_0 - x < \delta$.
To pišemo

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

Definicija

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Število A je desna limita funkcije f v točki $x_0 \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

za vsak $x > x_0$, za katerega je $x - x_0 < \delta$.
To pišemo

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

Trditev

Limita funkcije v točki x_0 obstaja natanko tedaj, ko v tej točki obstajata leva in desna limita in sta enaki.

Primer

Izračunajmo

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{x + \frac{\pi}{2}}{\arctan\left(\frac{\pi}{x}\right)}.$$

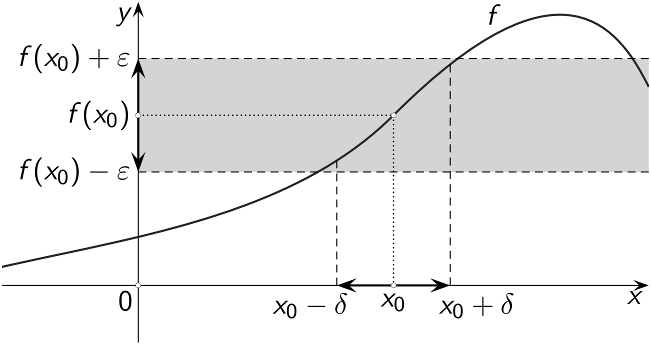
Zveznost funkcij

Definicija

Naj bo $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$. Funkcija f je zvezna v točki x_0, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

za vsak x, za katerega velja $|x - x_0| < \delta$.
Pravimo, da je funkcija f zvezna na D, če je zvezna v vsaki točki iz D.


y
f
$f(x_0) + \varepsilon$
$f(x_0)$
$f(x_0) - \varepsilon$
0
$x_0 - \delta$
x_0
$x_0 + \delta$
x

Izrek

Funkcija $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, je zvezna v točki x_0 natanko tedaj, ko je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Opomba

Podobno, kot smo definirali levo in desno limito, definiramo tudi, kdaj je funkcija zvezna z leve in kdaj je zvezna z desne.

Videli smo, da sta pojma zveznosti in limite tesno povezana. To dokazuje tudi naslednji izrek.

Izrek

Naj bo g zvezna funkcija v točki $\lim_{x\to x_0} f(x)$. *Potem je*

$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)),$$

torej lahko zamenjamo vrstni red računanja limite in računanja vrednosti zvezne funkcije.

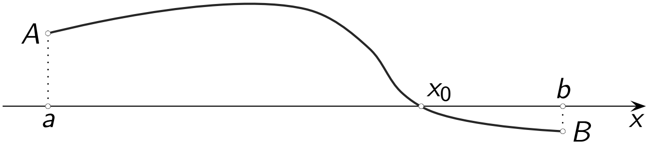
Z upoštevanjem lastnosti za računanje limit hitro izpeljemo, da velja:

- Vsota zveznih funkcij je zvezna funkcija.
- Produkt zveznih funkcij je zvezna funkcija.
- Kvocient zveznih funkcij je zvezna funkcija.
- Kompozitum zveznih funkcij je zvezna funkcija.

Lastnosti zveznih funkcij

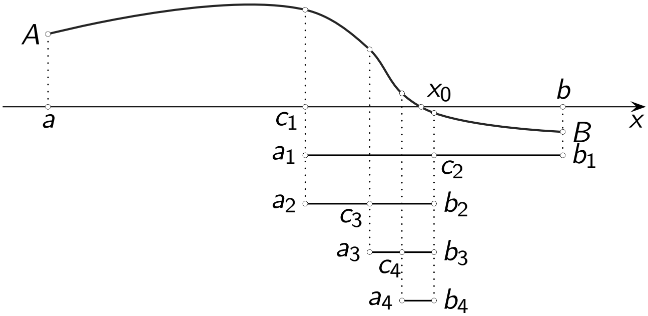
Trditev

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zvezna funkcija in naj bo* $f(a)f(b) < 0$, *torej funkcija* f *v krajiščih intervala zavzame nasprotno predznačeni vrednosti. Potem obstaja vsaj ena točka* $x_0 \in [a, b]$, *tako da je* $f(x_0) = 0$.



Dokaz

Obstoj točke x_0 dokažemo s pomočjo bisekcije.

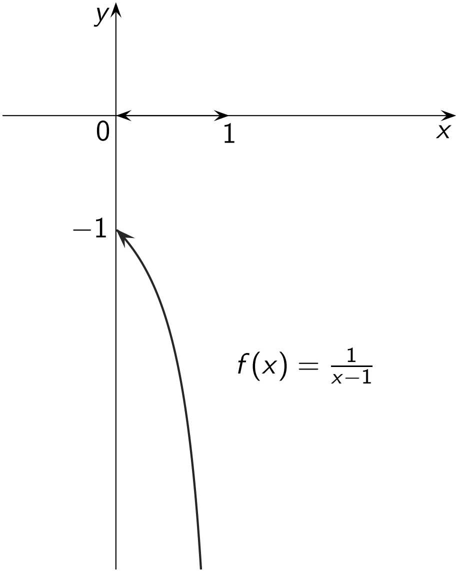


Trditev

Zvezna funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *je omejena.*

Opomba

Če interval ni zaprt, to ni nujno res.
Na primer, funkcija $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, je na intervalu $(0,1)$ zvezna in neomejena.


y
0
1
x
-1
$f(x) = \frac{1}{x-1}$