Funkcije

Osnovni pojmi

Preslikavam v množico R ali C pravimo funkcije – v prvem primeru realne v drugem pa kompleksne. V tem poglavju bomo obravnavali realne funkcije ene realne spremenljivke, to so preslikave $f: D \to R, D \subseteq R$. Definicijsko območje D in zaloga vrednosti $Z_f = \{y \in R; y = f(x)\_za\_nek\_x \in D\} = f(D)$ sta podmnožici množice R. Funkcija f priredi številu $x \in D$ (neodvisni spremenljivki) realno število $y = f(x) \in Z_f$, (odvisno spremenljivko). Funkcija $f: D \to R$ je določena z definicijskim območjem D, s predpisom f in z zalogo vrednosti Z_f.
Dve funkciji f in g sta enaki, kadar imata enaki definicijski območji: $D_f = D_g = D$ in če za vsak $x \in D$ velja $f(x)=g(x)$.

Graf funkcije

Graf realne funkcije ene realne spremenljivke $\Gamma(f) = \{(x, f(x), x \in D\} \subset R^2$ je podmnožica koordinatne ravnine. Vsaka navpična premica $x=a$, kjer je $a \in D$ seka graf $\Gamma(f)$ v natanko eni točki (navpična premica x=a, $a \notin D$ grafa sploh ne seka). Pravokotna projekcija grafa $\Gamma(f)$ na os x je definicijsko območje D, projekcija na os y pa je zaloga vrednosti Z_f.

Če je funkcija $f: D \to R$ injektivna, pripada vsaki vrednosti $c \in Z_f$ natanko en $x \in D$, za katerega je $f(x)=c$, torej seka vodoravna premica $y=c$, $c=Z_f$, graf $\Gamma(f)$ v natanko eni točki. Vodoravna premica $y=c$, $c \neq Z_f$, pa grafa sploh ne seka. Če je $f: D \to R$ surjektivna, je vsak $c \in R$ v zalogi vrednosti Z_f, torej vsak vodoravna premica $y=c$ seka graf vsaj v eni točki.

Inverzna funkcija

Injektivna funkcija $f: D \to R$ je obrnljiva, torej ji pripada inverzna funkcija $f^{-1}: Z_f \to R$, katere zaloga vrednosti je definicijsko območje D funkcije f. inverzno funkcijo f^{-1}dobimo tako, da zamenjamo vlogo spremenljivk x in y. Graf $\Gamma(f^{-1})$ je graf $\Gamma(f)$ prezrcaljen preko premice y=x.

Monotone funkcije

So funkcije, pri katerih z naraščanjem vrednosti neodvisne spremenljivke stalno narašča (ali stalno pada) tudi vrednost odvisne spremenljivke.

Definicija:

Funkcija $y=f(x)$ je naraščajoča, če za poljubni števili $x_1 < x_2$ iz definicijskega območja funkcije f velja, da je tudi $f(x_1) \leq f(x_2)$. Če je $f(x_1) < f(x_2)$, potem je f strogo naraščajoča.

Funkcija $y=f(x)$ je padajoča če za poljubni števili $x_1 < x_2$ iz defenicijskega območja funkcije f velja, da je tudi $f(x_1) \geq f(x_2)$, če je $f(x_1) > f(x_2)$, potem je strogo padajoča. Funkcija je monotona, če je padajoča ali naraščujoča in strogo monotona če je strogo padajoča ali strogo naraščajoča.

Strogo monotone funkcije so injektivne, zato ima vsaka strogo monotona funkcija svojo inverzno funkcijo. Inverzna funkcija naraščajoče funkcije je spet naraščajoča, inverzna funkcija padajoče funkcije je zopet padajoča.

Računanje s funkcijami

Iz funkcij lahko na različne načine sestavljamo nove funkcije. Če imamo $f: D \to R$ in $g: D \to R$ z enakima definicijskem območjema, lahko tvorimo njuno vsoto in razliko: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ njun produkt $(f*g)(x) = f(x)*g(x)$, ki imajo vse definicijsko območje D, in njun kvocient $f/g: D'' \to R$ __ $(f/g)(x): f(x)/g(x)$, ki ima za definicijsko območje množico $x \in D, g(x) \neq 0\} \subseteq D$.

Če sta dani funkciji $f: D_f \to R$ in $g: D_g \to R$ in je zaloga vrednosti Z_f vsebovana v definicijskem območju D_g, obstaja sestavljena funkcija ali kompozitum $g \circ f: D_f \to R$ _______ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Sode in lihe funkcije

Naj bo definicijsko območje *D* funkcije *f* simetrično glede na točko 0∈ R na primer D=(-a,a).
Definicija: funkcija $f: D \to R$ je soda, če je f(x)=f(-x) za vsak $x \in D$. Funkcija $f: D \to R$ je liha, če *je f(x)=-f(-x)* za vsak $x \in D$. Graf sode funkcije je krivulja, ki je simetrična glede na os *y*. Graf lihe funkcije pa je simetričen glede na izhodišče koordinatnega sistema.

Trditev: vsota sodih funkcij je soda funkcijam vsota lihih funkcij pa je liha funkcija. Produkt (ali kvocient) dveh sodih ali dveh lihih funkcij je soda funkcija, produkt sode in lihe funkcije pa je liha funkcija.

Zvezna funkcija

Definicija: Funkcija *f* je točki x_0 zvezna, če lahko za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo tak $\delta > 0$, da je $|\Delta y| = |f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon$ če je $|h| < \delta$.
Drugače povedano: za vsako epsilon okolico $(f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ točke $f(x_0)$ na osi *y* obstaja taka δ-okolica $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ točke x_0 na osi *x*, da je $f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ za vsak $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ohlapno rečeno: funkcija je zvezna takrat, kadar majhna sprememba neodvisne spremenljivke povzroči majhno spremembo funkcijske vrednosti.

Limita

Definicija: naj bo funkcija *f* definirana na intervalu *(a,b)*, razen morda v eni točki $\xi \in (a,b)$. Pravimo, da funkcija f konvergira k vrednostim *l*, ko gre *x* proti ξ, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - l| < \varepsilon$, če je le $|\xi - x| < \delta$. Število *l* je limita funkcije *f* v točki ξ, kar zapišemo $\lim_{x \to \xi} f(x) = l$ _ali_ $f(x) \to l; x \to \xi$.
Definicija: funkcija f, definirana na intervalu (a,b), konvergira z leve k vrednosti l , ko x narašča proti b, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$ da je |f(x)-l|< ε, če je b- δ<x<b. število *l* je leva limita funkcije *f* v točki *b*, kar zapišemo $\lim_{x \to b} f(x) = l$ _ali_ $f(x) \to l, x \to b$
Definicija: funkcija f, definirana na (a,b), konvergira z desne k vrednosti l, ko x pada proti a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - l| < \varepsilon$, če je a<x<a+ δ. Število l je desna limita funkcije f v točki a, kar zapišemo $\lim_{x \to a} f(x) = l$ _ali_ $f(x) \to l, x \to a$.

Trditev: $\lim_{x \to \xi} f(x) = l$ natanko takrat, kadar je $\lim_{x \to \xi_l} f(x) = \lim_{x \to \xi_d} f(x) = l$

Izrek: naj bo definirana f na intervalu (a,b), razen morda v točki $\xi \in (a,b)$. Potem je $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$ natanko takrat, kadar za vsako zaporedje (xn) z intervala (a,b), ki konvergira proti ξ, zaporedje slik ($f(x_n)$), konvergira proti *l*.

Kriterij za zveznost funkcije

Limita funkcije v točki x= ξ lahko obstaja ali ne – ne glede na to ali je funkcija v tej točki definirana. Če je f(ξ)definirana velja:

Trditev: funkcija f(x) je v točki ξ zvezna natanko takrat, kadar njena limita v točki ξ obstaja in velja $\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$.

Trditev: funkcija f(x) je v točki ξ zvezna natanko takrat kadar je $\lim_{x\to\xi_d} f(x) = \lim_{x\to\xi_l} f(x) = f(\xi)$.

Definicija: funkcija f je v točki x= ξ zvezna z leve če je $\lim_{x\to\xi_l} f(x) = f(\xi)$ in zvezna z desne $\lim_{x\to\xi_d} f(x) = f(\xi)$ če to velja.

Trditev: funkcija f(x), definirana na intervalu (a,b), je v točki $\xi \in (a,b)$, zvezna natanko takrat, kadar je $\lim_{h\to 0} \Delta y = \lim_{h\to 0}(f(\xi+h) - f(\xi)) = 0$, torej, kadar gre prirastek Δy odvisne spremenljivke proti 0, ko gre prirastek h neodvisne spremenljivke proti 0.

Izrek: funkcija f(x), definirana na intervalu (a,b), je v točki $\xi \in (a,b)$ zvezna natanko takrat, kadar za vsako konvergentno zaporedje $x_n \to \xi$ velja $f(x_n) \to f(\xi)$.

Računanje z zveznimi funkcijami

Izrek: če sta funkciji f in g definirani na intervalu (a,b), razen morda v točki $\xi \in (a,b)$ in je $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$ in $\lim_{x\to\xi} g(x) = m$, potem velja $\lim_{x\to\xi}(g(x) \pm f(x)) = m \pm l$ oziroma $\lim_{x\to\xi}(g(x) f(x)) = ml$ in če gre $g(x) \neq 0$ v neki okolici točke xi in $m \neq 0$ $\lim(f(x)/g(x)) = l/m$.

Posledica: če sta funkciji f(x) in g(x) zvezni v točki $\xi \in (a,b)$, so v ξ zvezne tudi funkcije $f(x) \pm g(x)\_in\_f(x)g(x)$. Če je $g(\xi) \neq 0$, je v ξ zvezna tudi funkcija f(x)/g(x).

Izrek: če za funkcije f(x), g(x) in h(x), ki so definirane na intervalu (a,b), razen morda v točki $\xi \in (a,b)$, povsod velja $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ in $\lim_{x\to\xi} g(x) = \lim_{x\to\xi} h(x) = l$ je tudi $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$.

Izrek: če obstaja $\lim_{x\to\xi} f(x) = l$ in je funkcija g(u) zvezna v točki u=l, obstaja tudi limita kompozituma $g \circ f$ in je $\lim_{x\to\xi}(g \circ f)(x) = g(\lim_{x\to\xi} f(x)) = g(l)$

Posledica: če je funkcija f(x) zvezna v točki $x = \xi$ in funkcija g(u) zvezna v točki u= $f(\xi)$, je kompozitum $(g \circ f)(x)$ zvezen v točki $x = \xi$.

Izrek: če je funkcija f(x) injektivna (se pravi, če obstaj inverzna funkcija f-1) in zvezna v točki $x = \xi$, je inverzna f-1(u) zvezna v točki y= $f(\xi)$.

Zveznost funkcij na intervalu

Definicija: funkcija f(x) je zvezna na odprtem intervalu (a,b), če je zvezna v vsaki točki $x \in (a,b)$. Funkcija f(x) je zvezna na zaprtem intervalu $[a,b]$, če je zvezna na odprtem intervalu (a,b), zvezna z desne v točki a in zvezna z leve v točki b.

Definicija: funkcija f je na intervalu $[a,b]$, enakomerno zvezna, če vsakemu $\varepsilon > 0$ pripada tak $\delta > 0$, da je neenačba $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, izpolnjena za vse take intervale x_1, x_2 z intervala $[a,b]$, za katere je $|x_2 - x_1| < \delta$.

Izrek: če je funkcija zvezna na zaprtem intervalu $[a,b]$, je na tem intervalu enakomerno zvezna.

Izrek: funkcija f naj bo na intervalu $[a,b]$ zvezna in naj bo v krajiščih intervala različno predznačena: f(a)f(b)<0. Potem obstaja vsaj ena točka $\xi \in (a,b)$, kjer je $f(\xi) = 0$.

Definicija: funkcija f je na množici A omejena če je slika $f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset R$ omejena množica.

Izrek: funkcija, ki je zvezna na zaprtem intervalu je na tem intervalu omejena.

Izrek: funkcija f, ki je zvezna na zaprtem intervalu $[a,b]$, zavzame v neki točki $x_m \in [a,b]$ svojo natančno spodnjo mejo m in v neki točki $x_M \in [a,b]$ svojo natančno zgornjo mejo M.

Izrek: funkcija f ki je zvezna na zaprtem intervalu $[a,b]$, na tem intervalu zavzame vsako vrednost med svojo natančno spodnjo mejo m in natančno zgornjo mejo M.

Izrek: zaprt interval s z zvezno funkcijo preslika v zaprt interval.

Pregled elementarnih funkcij

Algebraične funkcije

Funkcije delimo na algebraične in transcendentne. Med algebraične funkcije sodijo polinomi, racionalne funkcije, koreni in vse močne kombinacije naštetih funkcij.

Definicija: funkcija f je algebraična, če odvisna spremenljivka y=f(x) zadošča kakšni enačbi oblike $a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots a_1(x)y + a_0(x) = 0$, kjer so koeficienti a0(x),…,an(x) polinomi spremenljivke x. Na primer, funkcija $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ je algebraična, ker y=f(x) zadošča enačbi $y^2 + x^2 - 1 = 0$. Vsote, produkti, kvocienti, potence in kompozitumi algebraičnih funkcij so spet algebraične funkcije.

Transcendentne funkcije

Funkcije, ki niso algebraične, so transcendentne. Med elementarne transendente funkcije sodijo logaritem in eksponetna funkcija, kotne ali trigonometrične funkcije, inverzne trigonometrične ali ciklometrične funkcije, hiperbolične funkcije in inverzne hiperbolične ali area funkcije. To pa aaše zaleč ni ves seznam omenjenih funkcij.

Logaritemska funkcija

Eksponentni funkciji je inverzna logaritemska funkcija. Dobimo jo tako da v eksponentni funkciji y=ax zamenjamo spremenljivki x in y. (x=ay natanko tedaj ko je y=logax). Lastnosti logaritemske funkcije lahko razberemo iz lastnosti eksponetne funkcije. Ker je eksponentne funkcija povsod pozitivna, je logaritemska definirana za x>0. Kot eksponentna je tudi logaritemska funkcija za a>1 strogo naraščajoča in za a<1 strogo padajoča. Ničla logaritemske funkcije je pri x=1, ker je a0=1. iz adicijskega izreka za eksponentno funkcijo dobimo zvezo loga(xy)=logax+logay, ki velja pri poljubni osnovi a. kot pri eksponentni funkciji je tudi pri logaritemski v matematiki napogosteje osnova število e. logaritmu, ki ima za osnovo število e, pravimo naravni logaritem in ga navadno pošemo brez osnove, torej je logx=logex=lnx.

Kotne funkcije

Osnovni kotni ali trigonometrični funkciji sta sinus in kosinus. Povezani sta z enačbo sin2+cos2=1.

Definicija: funkcija f(x) je periodična s periodo w, če je f(x+w)=f(x) za vsak $x \in R$. Najmanjši periiodi funkcije pravimo osnovna perioda. S pomočjo funkcij sinus in kosinus smo definirali fuknciji tangens in kotangens, in še sekans in kosekans.

Ciklometrične funkcije

Ciklometrične funkcije so inverzne kotnim funkcijam, pri njihovi definiciji moramo biti previdni, saj so kotne funkcije periodične in zato niso injektivne. Pri definiciji inverzne funkcije se moramo omejiti na tak interval , kjer je kotna funkcija strogo monotona, torej injektivna.

Hiperbolične funkcije

Hiperbolične funkcije so v marsičem podobne kotnim funkcijam. Osnovni hiperbolični funkciji sta hiperbolični sinus $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ in hiperbolični kosinus $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Funkciji sh in ch sta povezani podobno kot sinus in kosinus ch2x-sh2x=1.