Integral

Nedoločeni in določeni integral

Nedoločeni integral

V poglavju o odvajanju funkcij smo se naučili dani funkciji *f* poiskati njen odvod *f`* oziroma diferencial $df = f`(x)dx$. Ugotovili smo da je vsaka odvedljiva funkcija zvezna, zvezna funkcija pa ni nujno odvedljiva. Tu zastavimo obratno nalogo – k dani funkciji *f* iščemo tisto funkcijo *F*, katere odvod je *f*: *F`(x)=f(x).*

Definicija: funkcijo *F*, katere odvod je enak *f*, imenujemo nedoločeni integral funkcije *f* in pišemo $F(x)=\int f(x)dx$.
Kadar nedoločeni integral funkcije *f* obstaja, to ni ena sama funkcija – če je *F* integral funkcije *f* in *C* poljubna konstanta, je tudi *F+C* integral iste funkcije, saj imata funkciji *F* in *F+C* isti odvod *f.*

Izrek: če je *F* kak nedoločen integral funkcije *F*, dobimo vsak drug njen integral tako, da funkciji *F* prištejemo konstanto.

Določeni integral

Do pojma integrala najnaravneje pripelje problem računanja ploščin krivočrtnih likov. Naj bo funkcija *f* na intervalu $[a,b]$ zvezna in povsod pozitivna: *f(x)>0*. Radi bi izračunali ploščino *S* lika, ki ga omejuje ta krivulja, krajni koordinati *x=a* in *x=b* ter odsek abscisne osi.
Problema se lotimo tako, da namesto ploščine krivočrtnega lika izračunamo ploščino stopničastega lika, ki se danemu krivočrtnemu liku čim bolj prilega.
V ta namen izberemo delitev intervala $[a,b]$, to je množica n+1 točk D={$x_0, x_1 \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n$}, za katere velja $x_0 = a \le x_1 \le x_2 \le .... \le x_{n-1} \le b = x_n$. Te točke razdelijo interval na n podintervalov $[x_{k-1}, x_k]$ z dolžinami $\delta_k = x_k + x_{k-1}$, *k=1,2,3,4…n*. Na vsakem podintervalu izberemo točko $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, k=1,….n. Produkt $f(\xi_k)\delta_k$ je enak ploščini pravokotnika, ki ima δ_k za osnovnico in $f(\xi_k)$ za višino. Vsoti vseh teh ploščin $\sigma_D = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k = f(\xi_1)\delta_1 + f(\xi_2)\delta_2 + ... + f(\xi_n)\delta_n$, pravimo integralska vsota funkcije *f* in je približek za iskano ploščino, ki je tem boljša, čim manjše so dolžine podintervalov δ_k.

Naj bo funkcija *f* na intervalu $[a,b]$ omejena in naj bo $m = \inf_{a \le x \le b} f(x)$ in $M = \sup_{a \le x \le b} f(x)$. Če je *D={$x_0, x_1, x_2 \ldots . x_n$}* delitev intervala, je tudi na vsakem podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ funkcija *f* omejena, za vsak k obstajajo $m_k = \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$ in $M_k = \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$. Vsotam $s_D = \sum_{k=1}^{n} m_k \delta_k$ in $S_D = \sum_{k=1}^{n} M_k \delta_k$ pravimo spodnje in zgornje integralske vsote. Za vsako delitev D in za vsako integralsko vsoto σ_D velja: $m(b-a) \le s_D \le \sigma_D \le S_D \le M(b-a)$.

Vse spodnje vsote so omejene navzgor, saj je $s_D \leq M(b-a)$ za vsako delitev *D*. vse zgornje vsote pa so omejene navzdol, saj za vsako delitev *D* velja $S_D \geq M(b-a)$. Zato obstaja $I_1=\sup s_D$ in $I_2=\inf S_D$.

Definicija:funkcija *f* je integrabilna na intervalu *[a,b]*, če je $I_1=I_2$. Število $I=I_1=I_2$ imenujemo določeni integral funkcije *f* na intervalu *[a,b]* in pišemo $I=\int_a^b f(x)dx$.

Izrek: funkcija *f* je integrabilna na intervalu *[a,b]*, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja taka delitev intervala *D*, da je $S_D - s_D < \varepsilon$, če je funkcija integrabilna na intervalu *[a,b]*, očitno velja $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Če je funkcija *f* integrabilna na intervalu *[a,b]* in je (D_m) poljubno zaporedje delitev, ki ima to lastnost, da gredo vse dolžine δ_k proti *0*, ko gre $m \to \infty$, ter je pripadajoče zaporedje integralskih vsot σ_m, potem je $\lim_{m\to\infty} \sigma_m = \int_a^b f(x)dx$.

Izrek: funkcija, ki je zvezna na intervalu *[a,b]*, je na tem intervalu tudi integrabilna.

Izrek: če je funkcija f na intervalu *[a,b]* odsekoma zvezna, je integrabilna.

Izrek: vsaka monotona funkcija je integrabilna.

Lastnosti določenega integrala

Povprečna vrednost integrabilne funkcije *f* na intervalu *[a,b]* je število $P=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

P je med natančno spodnjo mejo *m* in natančno zgornjo mejo *M* funkcije, torej $m \leq P \leq M$. Povprečno vrednost funkcije si lahko predstavljamo kot višino tistega pravokotnika nad intervalom *[a,b]*, ki ima enako ploščino kot lik, ki ga nad intervalom *[a,b]* določa krivulja *y=f(x)*.

Izrek: (o povprečni vrednosti): če je *f* zvezna na intervalu *[a,b]*, obstaja vsaj ena točka $c \in [a,b]$, kjer je $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = P$.

Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Naj bo *f* zvezna funkcija na intervalu *[a,b]*. Za vsak $x \in [a,b]$ je *f* zvezna na intervalu *[a,x]*, zato obstaja $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. Tako smo dobili novo funkcijo, ki je definirana na intervalu *[a,b]*.

Izrek: Funkcija *F(x)* je zvezna na *[a,b]*. Drugače povedano: določeni integral je zvezna funkcija zgornje meje.

Izrek: (osnovni izrek integralskega računa): funkcija *F(x)* je odvedljiva na intervalu *[a,b]*, njen odvod je $F`(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$. Drugače povedano: določeni integral *F(x)* kot funkcija zgornje meje je nedoločeni integral funkcije *f(x)*.

Izrek: vsaka zvezna funkcija ima nedoločeni integral.

Izrek: (Newton-Leibnizova formula): če je *f* zvezna funkcija na intervalu *[a,b]* in *F* njen poljuben nedoločeni integral je $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$.

Pravila za integriranje

1. Če sta *f* in *g* integrabilni funkciji, sta integrabilni tudi njena vsota in razlika. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

2. Če je *f* integrabilna funkcija in *k* konstanta, je funkcija *kf* tudi integrabilna in velja $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

3. Vpeljava nove spremenljivke. Če je *x=x(t)* odvedljiva funkcija je $\int f(x)dx = \int f[x(t)]x`(t)dt$.

4. Vpeljava nove spremenljivke v določeni integral. Naj bo *f* zvezna funkcija. Če je funkcija *x=x(t)* monotona, zvezno odvedljiva na intervalu $[\alpha,\beta]$ in je $x(\alpha)=a$ in $x(\beta)=b$, velja formula $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[x(t)]x`(t)dt$.

5. integracija po delih (*integratio per partes*): metodo dobimo iz formule za odvod produkta dveh funkcij. Naj bost *u* in *v* odvedljivi funkciji. Zanju velja *(uv)`=u`v+uv`*, zato je po definiciji določenega integrala $uv = \int u`vdx + \int uv`dx$. Od tod dobimo $\int uv`dx = uv - \int u`vdx$ ali krajše $\int udv = uv - \int vdu$.

Nepravi posplošeni integral

Vzemimo najprej, da je integracijski interval *[a,b]* končen, funkcija *f* pa na njem ni omejena. Naj bo funkcija *f* zvezna na *[a,b)*, v točki *b* naj ima pol. Izberimo si pozitivno število $\varepsilon < b-a$. Na intervalu *[a,b-*ε *]* je funkcija *f* zvezna, zato tudi omejena, in določeni integral

$I(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ obstaja.

Definicija: če obstaja limita integrala $I(\varepsilon)$ (zgornji int.), ko $\varepsilon \to 0$, ji pravimo posplošeni ali nepravi integral funkcije *f* na intervalu *[a,b]* in pišemo $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Če ima *f* pol v točki *a* in je drugod na *(a,b]* zvezna, definiramo podobno: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{0 \leftarrow \varepsilon} I(\varepsilon) = \lim_{0 \leftarrow \varepsilon} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$ če ta limita obstaja. Kadar ima *f* pol v kaki notranji točki $c \in [a,b]$, interval razdelimo na dva podintervala *[a,c]* in *[c,b]* ter poiščemo limiti: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta \to 0} \int_{c+\eta}^b f(x)dx$.

Naj bo funkcija *f(x)* definirana in omejena na neomejenem intervalu, na primer *[a,neskončno)* in naj bo integrabilna na vsakem končnem podintervalu *[a,b]*.

Definicija: če obstaja limita $I(b) = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$ ji pravimo posplošeni ali nepravi integral funkcije *f* na intervalu *[a, ∞)* in pišemo $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$. Podobno definiramo integral na intervalu *(-neskončno,b]*. integral na intervalu *(-neskončno,neskončno)*, ki je na obe strani neomejen, je enak $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^0 f(x)dx + \lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x)dx$ in obstaja če obe limiti obstajata in sta končni.
Vrednost posplošenega integrala lahko približno izračunamo tako, da ga nadomestimo z določenim integralom, ki se od posplošenega le nemalo razlikuje. Pri tem pa moramo vedeti če posplošeni integral sploh obstaja, zato je tukaj par kriterijev za ugotavljanje.

Izrek: integral funkcije *f* na intervalu *[a,neskončno)* obstaja, natanko takrat, kadar za vsak ε obstaja tak *b*, da je $\left| \int_a^{b_1} f(x)dx - \int_a^{b_2} f(x)dx \right| = \left| \int_{b_2}^{b_1} f(x)dx \right| < \varepsilon$ če sta $b_1, b_2 > b$.
Podoben sklep lahko zapišemo za integral funkcije *f* na intervalu *[a,b]*, kjer ima pol.

Izrek: (primerjalni kriterij) naj bo *g(x)>0* taka funkcija, definirana na *[a,neskončno)*, da za vsak $x \in [a, \infty)$ velja $|f(x)| \leq g(x)$. Če obstaja integral funkcije g na [a,neskončno), obstaja tudi integral funkcije *f* na *[a,neskončno).*
Izrek: če je *f(x)* nenegativna zvezna in padajoča funkcija na *[a,neskončno)*, posplošeni integral in vrsta $\int_1^\infty f(x)dx \_\_ in \_\_ \sum_1^\infty f(n)$ konvergirata ali pa divergirata hkrati.