ODVOD

Definicija odvoda

Naj bo funkcija *f* definirana na intervalu *(a,b)* in x_0 točka s tega intervala. Vzemimo število *h*, dovolj majhno, da je tudi $x_0+h\in(a,b)$ in $\Delta y = f(x_o+h)-f(x_0)$ prirastek funkcijske vrednosti. Diferenčni kvocient funkcije *f* v točki x_0 $\frac{f(x_o+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\Delta y}{h}=\varphi(x_0,h)$ pove, kako hitro se v povprečju spreminja vrednost funkcije *f* med točkama x_0+h in x_0.

Definicija: funkcija *f* je v točki x_0 odvedljiva, če obstaja limita diferenčnega kvocienta $f`(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_0)}{h}$ ki ji pravimo odvod funkcije *f* v točki $x_0$. Odvod $f`(x_0)$ meri hitrost s katero se vrednost funkcije spreminja v bližini točke x_0.

Diferenčni kvocient je enak tangensu kota, ki ga premica skozi točko $(x_0, f(x_0))$ ___ $(x_0+h, f(x_0+h))$ na grafu oklepa s pozitivnim delom osi *x*, torej smernemu koeficientu te premice. Ko $h\to 0$, ta premica drsi proti tangenti. Funkcija je odvedljiva v točki x_0 natanko takrat, kadar ima njen graf v točki $(x_0,f(x_0))$ tangento, odvod $f`(x_0)$ pa je smerni koeficient te tangente.

Izrek: če je funkcija v neki točki odvedljiva je v tej točki tudi zvezna.

Definicija: funkcija *f* je odvedljiva na odprtem intervalu *(a,b)*, če je odvedljiva vsaki točki $x\in(a,b)$. Na zaprtem intervalu $[a,b]$ je odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki $x\in(a,b)$ in če v levem krajišču *a* obstaja desni odvod, v desnem krajišču *b* pa levi odvod. Funkcija, ki je na nekem intervalu odvedljiva je na tem intervalu tudi zvezna.

Pravila za odvajanje !!!

Diferencial

Naj bo funkcija *f* odvedljiva na intervalu *(a,b)*, točki *x* in $x+\Delta x$ na tem intervalu in $\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$ sprememba vrednosti funkcije *f*, ko se *x* spremeni za Δx. Odvod f`(x) lahko zapišemo kot $f`(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Razlika med odvodom in diferenčnim kvocientom $\eta=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f`(x)$ gre proti 0, ko $\Delta x\to 0$. Prirastek funkcijske vrednosti $\Delta y = f`(x)\Delta x+\eta\Delta x$ je torej enak pri majhni spremembi približno $\Delta y\approx f`(x)\Delta x$.
Običajno pišemo $\Delta x = dx$, izrazu *dy=f`(x)dx* pravimo diferencial funkcije *f(x)*.
Odvod z diferencialom se izraža kot $f`(x)=y`=dy/dx$.
Z diferenciali si mnogokrat pomagamo pri računanju približnih funkcij, saj velja $f(x+dx)=f(x)+\Delta y\approx f(x)+dy=f(x)+f`(x)dx$.

Višji odvodi

Če je funkcija *f* odvedljiva na nekem intervalu, je njen odvod *f*\`, nova funkcija, definirana na tem intervalu, ki je lahko odvedljiva. Odvod te funkcije $f`` = (f`)`$ imenujemo drugi odvod funkcije *f*. Če je tudi ta odvedljiv, je njegov odvod f\`\`\`=(f\`\`)\`, tretji odvod funkcije *f*. Na splošno pravimo: če je *(n-1)-vi* odvod funkcije odvedljiva funkcija, je njen odvod $(f^{(n-1)})` = f^{(n)}$ *n-ti* odvod funkcije *f* (ali odvod n-tega reda), funkcija *f* pa je n-krat odvedljiva. Za funkcijo, ki ima odvod poljubnega reda pravimo, da je neskončnokrat odvedljiva.

Drugi odvod sestavljene funkcije

Drugi odvod posredne funkcije *y=f(u), u=u(x)* dobimo tako, da prvi odvod, torej funkcijo $dy/dx = f`(u)u`(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ odvajamo in dobimo $d^2y/dx^2 = f``(u)(u`(x))^2 = \frac{d^2y}{du^2}(\frac{du}{dx})^2 + \frac{dy}{du^2}\frac{d^2u}{dx^2}$.

Višji odvod produkta

Vzemimo n-krat odvedljivi funkciji *u* in *v*. Odvodi produkta so *y=uv*:

$$y` = u`v + uv`$$
$$y`` = u``v + 2u`v` + uv``$$
$$y``` = u```v + 3u``v` + 3u`v`` + uv```$$

in splošno $y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$

Drugi odvod inverzne funkcije

Naj bo *f* dvakrat odvedljiva injektivna funkcija. Inverzna funkcija f^{-1} je določena z relacijo $f(f^{-1}(x)) = x$. Če to enačbo enkrat odvajamo in pišemo $f^{-1}(x) = y$, dobimo $f`(y)(f^{-1})`(x) = f`(y)y` = 1$. Če enačbo odvajamo še enkrat dobimo $(f``(y)y`)y` + f`(y)y`` = f``(y)(y`)^2 + f`(y)y`` = 0$ torej je drugi odvod enak $(f^{-1})``(x) = y`` = \frac{-f``(y)(y`)^2}{f`(y)} = \frac{-f``(y)}{(f`(y))^3}$.

Lastnosti odvedljivih funkcij

Naj bo *f* odvedljiva funkcija na intervalu $[a,b]$. Če je v neki točki $x \in (a,b)$ odvod $f`(x)$ pozitiven, torej $f`(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$ mora biti za dovolj majhen *h* tudi diferenčni kvocient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0$. Razlika funkcijskih vrednosti *f(x+h)-f(x)* je negativna, če je *h* negativen, in pozitivna če je *h* pozitiven. To pa pomeni, da funkcijska vrednost ob prehodu skozi točko *x* narašča – v točkah levo od točke *x* (tj. točkah *(x+h)*, kjer je *h* negativen) je manjša kot *f(x)*, v točkah desno od *x* (tj. točkah *(x+h)*, kjer je *h* pozitven) pa je večja kot *f(x)*. na podoben način se prepričamo, da funkcijska vrednost ob prehodu skozi točko , kjer je odvod negativen pada. Težje je ugotoviti, kaj se dogaja s funkcijsko vrednostjo ob prehodu skozi točko x_0, kjer je $f`(x_0)=0$. v takih točkah je tudi diferencial funkcije, ki je ocena za funkcijsko spremembo, enak *0*, torej se funkcijska vrednost ob prehodu skozi točko spreminja zelo počasi. Točko $x_0$, v kateri je odvod $f`(x_0)=0$, pravimo kritična ali stacionarna točka funkcije *f*.

Lokalni ekstremi

definicija: funkcija *f* ima v točki *c* lokalni maksimum, če obstaja tako število $\delta>0$, da je $f(x)\le f(c)$ za vsak $x\in(c-\delta,c+\delta)$. Če je $f(x)<f(c)$ za vsak $x\in(c-\delta,c+\delta)$, razen za $x=c$, je v točki *c* strogi maksimum funkcije *f*.
Kadar obstaja število $\delta>0$, za katerega je $f(x)\ge f(c)$ za vsak $x\in(c-\delta,c+\delta)$, ima funkcija *f* v točki *c* lokalni maksimum. Če je $f(x)>f(c)$ za vsak $x\in(c-\delta,c+\delta)$, razen za $x=c$, je v točki strogi minimum funkcije *f*.

Izrek: (Fermat) Če je funkcija *f* odvedljiva , je točka *c*, v kateri ima lokalni ekstrem, kritična točka, torej $f`(c)=0$. Pogoj $f`(c)=0$ iz fermatovega izreka je potreben pogoj za obstoj ekstrema, vendar pa ni zadosten.

Odvedljive funkcije na zaprtem intervalu

Izrek (Rolle): funkcija *f*, ki je odvedljiva na zaprtem intervalu $[a,b]$ in ima v krajiščih enaki vrednosti $f(a)=f(b)$, ima na intervalu (a,b), vsaj eno kritično točko.

Izrek: (lagrange): če je *f* odvedljiva funkcija na končnem intervalu $[a,b]$, obstaja na tem intervalu vsaj ena točka *c*, kjer je $f`(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Lagrangov izrek pove, da na gladki krivulji $y=f(x)$ med točkama *A* in *B* obstaja vsaj ena točka *D*, v kateri je tangenta na krivuljo vzporedna sekanti skozi točko *A* in *B*.

Izrek: funkcija *f*, ki je na intervalu $[a,b]$ odvedljiva in je njen odvod povsod enak *0*, tj. $f`(x)=0$ za vsak $x\in(a,b)$, je konstanta.

Izrek: funkciji f_1 in f_2, ki imata povsod na intervalu $[a,b]$ enaka odvoda, se razlikujeta kvečjemu za konstanto $f_2(x)=f_1(x)+C$.

Izrek: (cauchy) Funkciji *f* in *g* naj bosta zvezni na intervalu $[a,b]$, v vsaki notranji točki tega intervala odvedljivi in naj bo $g`(x)\ne 0$ za vsak $x\in(a,b)$. Potem obstaja število $c\in(a,b)$, da je $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(a)}=\dfrac{f`(c)}{g`(c)}$.

Izrek: (I`Hopital): naj bosta funkciji *f* in *g* definirani in odvedljivi na intervalu *(a,b)* in $g`(x)\ne 0$ za vsak $x\in(a,b)$. Če v točki $x_0\in(a,b)$ velja $f(x_0)=g(x_0)=0$ je $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f`(x)}{g`(x)}$, pri pogoju da limita na desni obstaja.

Izrek: naj bosta funkciji *f* in *g* odvedljivi na intervalu *(a,b)*, razen v točki $x_0\in(a,b)$ in g`(x) $\ne 0$ na intervalu *(a,b)*, če je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$ ______ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ je $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f`(x)}{g`(x)}$ pri pogoju da druga limita obstaja.

Izrek: če sta *f* in *g* odvedljivi na nekem intervalu (a,∞), razen v točki $x_0 \in (a,b)$, če je g`(x) $\neq 0$ na tem intervalu in če je $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ ali $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, potem je $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f`(x)}{g`(x)}$, pri pogoju da druga limita obstaja.

Monotonost in zadostni pogoj za ekstrem

Izrek: odvedljiva funkcija na intervalu $[a,b]$ ja naraščajoča natako takrat, kadar je $f`(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a,b)$, in padajoča natanko takrat, kadar je $f`(x) \leq 0$ za vsak $x \in (a,b)$.

Izrek: (prvi zadosten pogoj za obstoj lokalnega ekstrema). Funkcija *f(x)* zavzame v kritični točki *c* lokalni ekstrem natanko takrat, kadar odvod ob prehodu skozi točko *c* spremeni predznak. Če je $f`(x) < 0$ za x<c in $f`(x) > 0$ za x>c, je v točki *c* lokalni minimum, v obratnem primeru pa je v točki *c* lokalni maksimum.

Izrek: drugi zadosten pogoj za obstoj lokalnega ekstrema. Če je funkcija f v kritični točki c dvakrat odvedljiva in je $f``(c) > 0$, zavzame f v c lokalni minimum. Če je $f``(c) < 0$, pa lokalni maksimum.

Izrek: (tretji zadosten pogoj za obstoj lokalnega ekstrema) Funkcija *f*, ki je *(n+1)* krat odvedljiva, ima v kritični točki *c* lokalni ekstrem če je $f`(c) = f``(c) = ... = f^{(n-1)} = 0\_\_\_in\_\_\_ f^{(n)}(c) \neq 0$, kjer je *n* sodo število in sicer lokalni maksimum, če je $f^{(n)}<0$ in lokalni minimum, če je $f^{(n)}(c)>0$. če je *n* liho število, ekstrema v točki *c* ni.

Konveksnost, konkavnost in prevoji

Definicija: funkcija f, definirana na intervalu $[a,b]$, je na tem intervalu konveksna, če je za vsak 0<@<1 in za vsak par točk $x, y \in [a,b]$, $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$.
Če daljica, ki povezuje točki (x,f(x)) in (y,f(y)), leži povsod pod grafom funkcije je konkavna.

Izrek: dvakrat odvedljiva funkcija je na intervalu I konveksna, če je $f``(x) \geq 0$ za vsak $x \in I$ in konkavna, če je $f``(x) \leq 0$ za vsak $x \in I$.