Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

10. oktober 2013

Operaciji seštevanja in množenja na realnih in kompleksnih številih se ujemata, zato pravimo, da je množica kompleksnih števil razširitev množice realnih števil.

Na primer, naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) = a + b$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (ab, 0) = ab$$

Rešimo enačbo $x^2 = -1$ v okviru množice kompleksnih števil.

$$(a, b) \cdot (a, b) = (-1, 0).$$

$$(a^2 - b^2, ab + ba) = (-1, 0)$$

Iz enakosti imaginarnih delov sledi $ab = 0$, torej je $a = 0$ ali $b = 0$.
ÄŚe je $b = 0$, potem dobimo $a^2 = -1$, kar pa ni mogoče, saj je a realno število.
ÄŚe pa je $a = 0$, dobimo $b^2 = 1$, torej je $b = 1$ ali $b = -1$.

Enačba $x^2 = -1$ ima torej v okviru kompleksnih števil dve rešitvi $(0, 1)$ in $(0, -1)$.

Kompleksno število $(0, 1)$ označimo z i in ga imenujemo imaginarna enota.
Ker je

$$(b, 0) \cdot (0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b) = (0, b),$$

je

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1)$$

in zato lahko vsako kompleksno število predstavimo v obliki

$$(a, b) = a + b \cdot \mathrm{i}.$$

ÄŚe kompleksna števila zapišemo v obliki $a + b\mathrm{i}$, potem velja:

- $\mathrm{i}^2 = -1$
- $a + b\mathrm{i} + c + d\mathrm{i} = a + c + (b + d)\mathrm{i}$
- $(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = ac - bd + (ad + bc)\mathrm{i}$
- Realni del kompleksnega števila $\mathrm{Re}(a + b\mathrm{i}) = a$
- Imaginarni del kompleksnega števila $\mathrm{Im}(a + b\mathrm{i}) = b$
  Pozor!

Na množici kompleksnih števil $\mathbb{C}$ je definirano konjugiranje.
Naj bo $a + b\mathrm{i}$ kompleksno število. Potem je njegova konjugirana vrednost

$$\overline{a + b\mathrm{i}} = a - b\mathrm{i}.$$

Naj bosta z in w kompleksni števili. Hitro se lahko prepričamo, da velja:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

Na primer, prepričajmo se, da je $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
Naj bo $z = a + b\mathrm{i}$ in $w = c + d\mathrm{i}$. Potem je:

$$\overline{(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i})} = \overline{ac - bd + (ad + bc)\mathrm{i}}$$

$$= ac - bd - (ad + bc)\mathrm{i}$$

$$= (a - b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i})$$

$$= \overline{(a + b\mathrm{i})} \cdot \overline{(c + d\mathrm{i})}$$

Naj bo $z = a + b\mathrm{i}$ kompleksno število. Potem velja:

- $z + \overline{z} = a + b\mathrm{i} + a - b\mathrm{i} = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$,
- $z - \overline{z} = a + b\mathrm{i} - (a - b\mathrm{i}) = 2b\mathrm{i} = 2\mathrm{Im}(z)\mathrm{i}$,
- $z \cdot \overline{z} = (a + b\mathrm{i}) \cdot (a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2$,
  torej je
  $$z \cdot \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2} = 1$$
  in zato
  $$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{a^2 + b^2}.$$

Sledi, da je za kompleksno število $z = a + b\mathrm{i}$ njegov inverzni element za množenje enak

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + b\mathrm{i}} = \frac{a - b\mathrm{i}}{(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})} = \frac{a - b\mathrm{i}}{a^2 + b^2}.$$

Torej dve kompleksni števili $w = c + d\mathrm{i}$ in $z = a + b\mathrm{i}$ delimo po pravilu

$$\begin{aligned} w : z = \frac{w}{z} = \frac{c + d\mathrm{i}}{a + b\mathrm{i}} &= \frac{(c + d\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})}{(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})} \\ &= \frac{(c + d\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Primer

Izračunajte

$$\frac{2-3\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\overline{(-1+\mathrm{i})}} : (3-4\mathrm{i}).$$

$$\frac{2-3\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot\overline{(-1+\mathrm{i})}} : (3-4\mathrm{i}) = \frac{2-3\mathrm{i}}{\mathrm{i}\cdot(-1-\mathrm{i})}\cdot\frac{1}{3-4\mathrm{i}}$$

$$= \frac{2-3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\cdot\frac{3+4\mathrm{i}}{(3-4\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})} = \frac{(2-3\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}\cdot\frac{3+4\mathrm{i}}{3^2+4^2}$$

$$= \frac{(5-\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})}{2\cdot 25} = \frac{19+17\mathrm{i}}{50} = \frac{19}{50}+\frac{17}{50}\mathrm{i}$$

Absolutna vrednost kompleksnega števila $z = a + b\mathrm{i}$ je definirana z enakostjo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Vemo, da je $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$, torej je

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Za absolutno vrednost veljajo naslednje lastnosti:

- $|\overline{z}| = |z|$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|z + w| \leq |z| + |w|$, trikotniška neenakost

Kompleksna števila lahko predstavimo kot točke v ravnini.
Na abscisno os nanašamo realni del kompleksnega števila, na ordinatno os pa imaginarni del kompleksnega števila.
Absicno os imenujemo realna os, ordinatno os imenujemo imaginarna os, ravnino pa kompleksna ravnina.

Kompleksno število $a + b\mathrm{i}$ predstavimo v kompleksni ravnini s kartezičnima koordinatama (a, b).

Lahko pa kompleksno število $a + b\mathrm{i}$ predstavimo tudi s polarnimi koordinatami:

- dolžina krajevnega vektorja do točke (a, b), torej oddaljenost točke (a, b) od koordinatnega izhodišča

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = |a + b\mathrm{i}|$$

- polarni kot φ, torej kot med abscisno osjo in krajevnim vektorjem do točke (a, b), za katerega velja

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi$$

Torej je

$$\tan\varphi = \frac{b}{a}.$$

Pozor! Z enakostjo $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ polarni kot ni enolično določen.

Primer

Za $z = 1 + \mathrm{i}$ je polarni kot $\varphi = \frac{\pi}{4}$, za $w = -1 - \mathrm{i}$ je polarni kot $\psi = \frac{5\pi}{4}$, v obeh primerih pa je $\tan\varphi = \tan\psi = 1$.

Polarni zapis kompleksnega števila je

$$a + bi = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Opomba

Dve kompleksni števili $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ in $w = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ sta enaki, če je

- $r = \rho$
- $\varphi = \psi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Primer

Zapišite v polarni obliki kompleksno število $z = -1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$.

- $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$
- $\varphi = \arctan \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$

$$-1 - \sqrt{3}\mathrm{i} = 2(\cos \frac{4\pi}{3} + \mathrm{i} \sin \frac{4\pi}{3})$$