Matematika 1

Gregor Dolinar

Fakulteta za elektrotehniko
Univerza v Ljubljani

15. oktober 2013

Oglejmo si, kako množimo dve kompleksni števili, dani v polarni obliki.
Naj bo $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ in $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$.
Potem je

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(&\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ &+\mathrm{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\ = r_1 r_2(&\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \end{aligned}$$

Torej kompleksni števili zmnožimo tako, da zmnožimo njuni absolutni vrednosti, polarna kota pa seštejemo.
Podobno z uporabo adicijskih izrekov pokažemo, da je

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

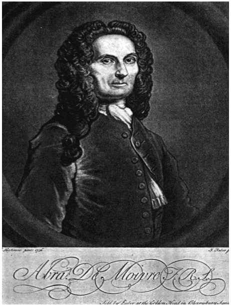
V posebnem primeru, ko je $z_1 = z_2 = z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, dobimo

$$z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + \mathrm{i}\sin(2\varphi)),$$

oziroma Moivrovo formulo

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)),$$

kjer je $n \in \mathbb{N}$.



Abraham de Moivre (1667 – 1754)
Ukvarjal se je s teorijo kompleksnih števil in teorijo verjetnosti. Bil je prijatelj Newtona, Halleya, Sterlinga.

Primer

Naj bo $z = \sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$. Izračunajmo z^8.

Kompleksno število z najprej zapišemo v polarni obliki:

- $|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$
- $\varphi = \arctan \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{4}$

Sledi $z^8 = (\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2})^8 = 2^8(\cos(8 \cdot (-\frac{\pi}{4})) + \mathrm{i}\sin(8 \cdot (-\frac{\pi}{4})))$

$$= 256(\cos(-2\pi) + \mathrm{i}\sin(-2\pi)) = 256.$$

Naj bo z dano kompleksno število. Poiščimo vse rešitve enačbe

$$w^n = z.$$

Opomba. Videli bomo, da ima ta enačba n rešitev. Izrazu, da je w n-ti koren števila z se bomo izogibali.
Zapišimo kompleksni števili z in w v polarni obliki:
$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, $w = \rho(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$.
Potem je po Moivrovi formuli
$\rho^n(\cos(n\psi) + \mathrm{i}\sin(n\psi)) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$.

Sledi, da je

- $\rho = r^{\frac{1}{n}}$
- $\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$.

Kljub temu, da je k lahko poljubno celo število, dobimo zaradi periodičnosti funkcij sinus in kosinus samo n različnih vrednosti izraza $\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}$.

Enačba $w^n = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ ima n rešitev in sicer

$$w_k = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

kjer je $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Primer

Poiščimo vse rešitve enačbe $w^4 = -1 + \mathrm{i}$.

Kompleksno število $-1 + \mathrm{i}$ najprej zapišemo v polarni obliki:

- $|-1 + \mathrm{i}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$
- $\varphi = \arctan \frac{1}{-1} = \frac{3\pi}{4}$

Primer

Sledi

$$w_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right),$$

$k = 0, 1, 2, 3.$

Dobimo štiri rešitve:

- $w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{16}\right)$
- $w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{11\pi}{16}\right)$
- $w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{19\pi}{16}\right)$
- $w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{27\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{27\pi}{16}\right)$

Definicija zaporedja

Definicija

Zaporedje realnih števil je predpis, ki vsakemu naravnemu številu priredi realno število.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & \dots \end{array}$$

Realno število a_n imenujemo n-ti člen zaporedja, število n pa indeks člena a_n.
Členi zaporedja so torej urejeni in jih lahko zapišemo po vrsti

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

Zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kratko zapišemo

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

a_n imenujemo splošni člen zaporedja.
Zaporedje ponavadi še krajše zapišemo $\{a_n\}$.
V nekateri literaturi je zaporedje zapisano (a_n).

Zaporedje lahko definiramo na več načinov:

- splošni člen a_n je podan s predpisom odvisnim od n (eksplicitni zapis)
- naštejemo nekaj začetnih členov, splošni člen a_n pa je podan s predpisom odvisnim od prejšnjih členov a_{n-1}, a_{n-2}, ... (rekurzivni zapis)

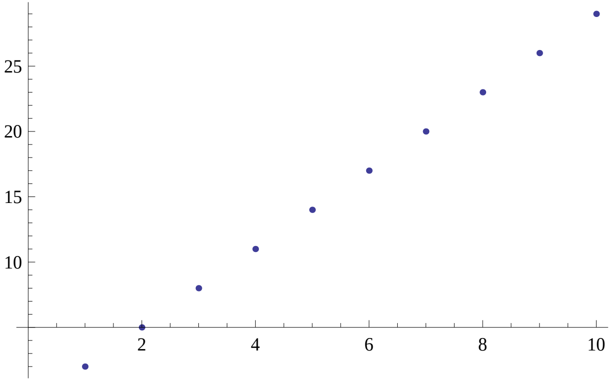
Člene zaporedje $\{a_n\}$ lahko zelo nazorno predstavimo tudi s točkami (n, a_n) v ravnini ali s točkami a_n na številski premici.

Primer

$2, 5, 8, 11, \ldots$

$a_n = 3n - 1$

$a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1} + 3$



Aritmetično zaporedje

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Razlika poljubnih dveh zaporednih členov je konstantna. To razliko d imenujemo tudi diferenca aritmetičnega zaporedja.

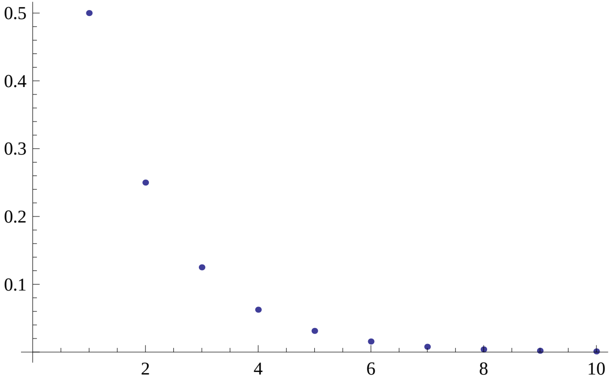
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Primer

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}$$



Geometrično zaporedje

$$a_{n+1} = a_n q$$

Količnik poljubnih dveh zaporednih členov je konstanten. Ta količnik q imenujemo tudi kvocient geometričnega zaporedja.

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Primer

$1, 1, 1, 1, \ldots$

$a_n = 1$

$a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1}$

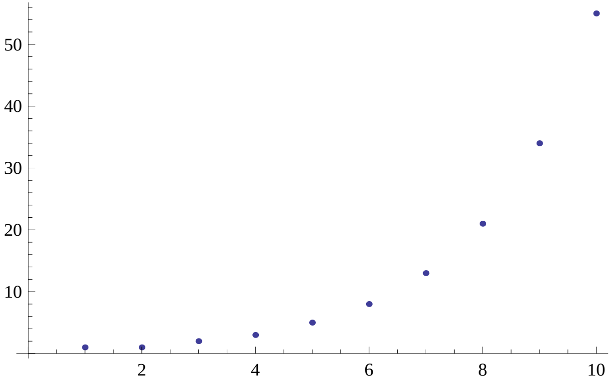
Primer

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$1, 1, 2, 3, 5, \ldots$

$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Fibonaccijevo zaporedje



Oglejmo si nekaj lastnosti zaporedij.

Definicija

Zaporedje $\{a_n\}$ je naraščajoče, če je $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, in strogo naraščajoče, če je $a_{n+1} > a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje $\{a_n\}$ je padajoče, če je $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, in strogo padajoče, če je $a_{n+1} < a_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

Zaporedje je monotono, če je naraščajoče ali padajoče.

Definicija

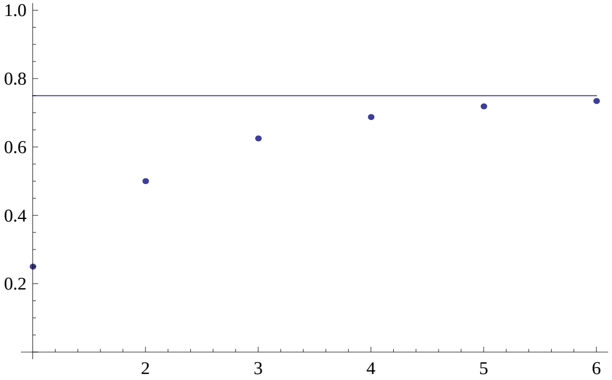
Zaporedje $\{a_n\}$ je navzgor omejeno, če obstaja tako realno število M, da je $a_n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Število M imenujemo zgornja meja zaporedja $\{a_n\}$.

Zaporedje $\{a_n\}$ je navzdol omejeno, če obstaja tako realno število m, da je $a_n \geq m$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Število m imenujemo spodnja meja zaporedja $\{a_n\}$.

Zaporedje je omejeno, če je navzgor in navzdol omejeno.

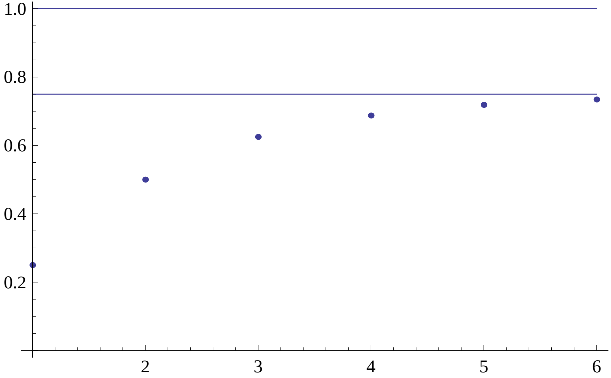
Primer

$$a_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{2^n}$$



Opomba

Če je M zgornja meja zaporedja $\{a_n\}$, potem je vsako realno število $N > M$ tudi zgornja meja zaporedja $\{a_n\}$.



Definicija

Najmanjšo izmed vseh zgornjih mej zaporedja $\{a_n\}$ imenujemo natančna zgornja meja ali supremum zaporedja $\{a_n\}$ in pišemo

$$M_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Največjo izmed vseh spodnjih mej zaporedja $\{a_n\}$ imenujemo natančna spodnja meja ali infimum zaporedja $\{a_n\}$ in pišemo

$$m_0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

Naj bo M_0 natančna zgornja meja. To pomeni, da je to najmanjša izmed vseh zgornjih mej. Če jo torej zmanjšamo za katerokoli, še tako majhno število $\varepsilon > 0$, potem $M_0 - \varepsilon$ ni več zgornja meja. To pa pomeni, da obstaja vsaj en tak člen a_{n_0} zaporedja $\{a_n\}$, da je $a_{n_0} > M_0 - \varepsilon$.

Razmislili smo, da je M_0 supremum zaporedja $\{a_n\}$ natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da je $a_{n_0} > M_0 - \varepsilon$.

Podobno velja, da je m_0 infimum zaporedja $\{a_n\}$ natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da je $a_{n_0} < m_0 + \varepsilon$.

Opomba

Natančno zgornja meja in natančna spodnja meja nista nujno člena zaporedja.