# MATEMATIKA I
## zapiski predavanj

| | |
|---|---|
| **Šolsko leto** | 2007 / 2008 |
| **Izvajalec** | Gregor Dolinar |
| **Avtor dokumenta** | Blaž Potočnik |

## UREJANJE DOKUMENTA

**VERZIJA** 01 **REVIZIJA** 00
**DATUM** 30. 1. 2009

**ZADNJI POPRAVLJAL** /
**PREGLEDAL** /

## OPOMBE

Na strani 24 manjka eno predavanje. Manjkajoča poglavja so opisana v knjigi Matematika I / Tomšič, Orel, Mramor- Kosta. – 5. izdaja. – Ljubljana, 2004 od strani 39 dalje.

## POPRAVKI

# FE-MA1-UNI
l. 07-08, Dolinar

I

## Množice, števila

Osnovni pojmi:

Def: Matematični objekt, ki združuje elemente z isto lastnostjo, imenujemo množica

- Če je $x \in$ množice, to pišemo $x \in A$, če ni v množici, pišemo $x \notin A$.

Množico lahko opišemo na 2 načina:
- naštejemo vse elemente

$A = \{1, 2, 3\}$ $\quad B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$

- opišemo lastnost, ki je skupna vsem

$A = \{x;\ x\text{-naravno število}, x < 4\}$
$B = \{x;\ x \text{ sodo število}\}$

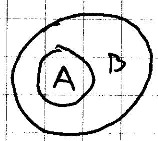
PRAZNA MNOŽICA nima elementov. Pišemo $\emptyset$ ali $\{\}$

Primer: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n};\ n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}\}$ racionalna
$\mathbb{R}$ = realna
$\mathbb{C}$ = kompleksna

OPERACIJE in ZVEZE

- inkluzija $A \subseteq B$

A je podmnožica B, če velja $x \in A$, potem je $x \in B$.




A je prava podmnožica B $\quad A \subsetneq B$
če je $A \subseteq B$ in $A \neq B$ (obstaja element v B, ki ni v A)

- presek $A \cap B$

$x \in A \cap B$, potem je $x \in A$ in $x \in B$

če je $A \cap B = \emptyset$, sta A in B disjunktni množici

- unija $A \cup B$

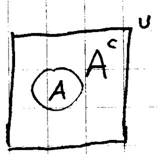
$x \in A \cup B$, potem velja $x \in A$ ali $x \in B$

- razlika $A \setminus B$

$x \in (A \setminus B)$ ... $x \in A$ in $x \notin B$

Če obravnavamo množice, ki so vse podmnožice neke množice $U$, potem množico $U$ imenujemo univerzalna množica.

Naj bo $A \subseteq U$. Potem množico $U \setminus A$ imenujemo komplement množice $A$ in pišemo $A^c$




- kartezični produkt

$A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ in } b \in B\}$

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$

- moč množice

$|A|$

Moč množice je enaka številu elementov te množice, če je množica končna, drugače je moč množice neskončna.

$A = \{1, 2, 7\}$ $|A| = 3$

LASTNOSTI

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$
- $A \cap B = B \cap A$ → komutativnost – lahko zamenjamo red
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ → asociativnost
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ distributivnost
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

# Preslikave

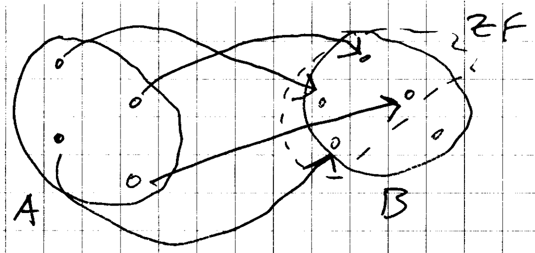
**Def.:** Naj bosta $A$ in $B$ množici; potem je preslikava $f$ iz $A$ v $B$ prepis, ki vsakemu elementu množice $A$ priredi natanko določen element množice $B$.

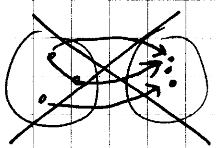
To pišemo: $f: A \to B$

$a \mapsto f(a) \quad a \in A$

Množico $A$ imenujemo <u>definicijsko območje</u> preslikave $f$.

$f(A) = \{ f(a), a \in A \}$ → zaloga vrednosti



to ni preslikava

- $A = \mathbb{N}$ $\quad B = \mathbb{N}$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f_1(n) = 2n$ $\quad$ Def: $\mathbb{N}$
ZF: soda števila

Primer: $\{$študenti FE$\} = A$
$B = \mathbb{N}$

$F: A \to B$
$f_2($student$) =$ vpisna št.

- $A = \mathbb{N}$
$B = \{0, 1\}$

$f_4(n) = \begin{cases} 0 & : n \text{ sodo} \\ 1 & : n \text{ liho} \end{cases}$

**Def.:** Preslikava $f\ A \to B$ je injektivna, če preslika različna elementa iz $A$ v različna elementa iz $B$.

$a \neq b$, potem je $f(a) \neq f(b)$

**Def.:** Preslikava $f\ A \to B$ je surjektivna, če za vsak element $b$ iz množice $B$ obstaja nek $a$ iz $A$, da je $f(a) = b$.

$f(A) = B$ vsakega porabimo

**Def.:** Če je preslikava injektivna in surjektivna, potem je to bijektivna preslikava.

1. $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f_1(n) = 2n$

$n_1 \neq n_2 \Rightarrow \underset{2n_1}{f_1(n_1)} \underset{\neq}{\neq} \underset{2n_2}{f_1(n_2)}$

$f_1$ je injektivna in ni surjektivna

2. $f_2$ : študenti – je injektivna ni surjektivna. Množica $\mathbb{N}$, študentov je končno št.

3. študenti $\to$ kraji

- ni injektivna, ker je iz enega kraja več študentov
- ni surjektivna, obstajajo kroji, kjer se ni rodil nobem študent

4. ni injektivna, je surjektivna ~~...~~

**Def.:** Preslikava $f : A \to A$ dana s predpisom $f(a) = a$. To je identična preslikava

Primer: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(n) = n$

**Def.:** Naj bo $f : A \to B$ injektivna preslikava, potem preslikavo

$f^{-1} : f(A) \to A$ Inverzna preslikava preslikave $f$.
$\to$ mora biti injektivna

Velja za vsak $a \in A$

~~...~~ $f^{-1}(f(a)) = a$

Def: Naj bo $f: A \to B$ in $g: B \to C$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$a \to f(a) \to g(f(a))$ kompozitum funkcije

$g \circ f \; A \to C$

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$ <u>kompozitum preslikav</u> $g$ in $f$

Primer:

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(n) = 2n+1$ $\quad g(n) = n^2$

$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(2n+1) = 4n^2 + 4n + 1$

$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n^2) = 2n^2 + 1$

Op: KOMPOZITUM NI KOMUTATIVNA OPERACIJA

ne velja nujno $f \circ g = g \circ f$

Op: Naj bo $f: A \to B$ injektivna, potem je $f^{-1} \circ f$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$f^{-1} \circ f =$ identična preslikava

$f^{-1} \circ f(a) = a$

$f \circ f^{-1} : f(A) \to f(A) =$ ident. na množici $f(A)$

DeF: $f: A \to B$ preslikava, potem je množica

$\Gamma(f) = \{(a, f(a)); a \in A\} \subseteq A \times B$

graf preslikave $f$

Primer: $f(x) = x^2$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Gamma(f) = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$

## Števila

- naravna

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$

- Množico naravnih števil lahko uredimo. Za poljubni naravni števili $n$ in $m$ velja bodisi $n \leq m$ ali $m \leq n$
- Lahko poiščemo naslednje število za vsako naravno število (najmanjše od vseh večjih naravnih števil). Obstaja tudi predhodnik, če je $n > 1$.

  To lastnost imenujemo diskretnost.
- Vsaka podmnožica $M \subseteq \mathbb{N}$ ima najmanjši element.
- Na množici $\mathbb{N}$ definiramo dve aritmetični računski operaciji - seštevanja in množenja

$A + B = B + A$, $AB = BA$ — komutativnost

$(A + B) + C = A + (B + C)$, $(ab)c = a(bc)$ — asociativnost

$a(b + c) = ab + ac$ — distributivnost

Množica $\mathbb{N}$ je zaprta za seštevanje in množenje

### Indukcija

Pri dokazovanju lastnosti naravnih števil velikokrat uporabljamo matematično indukcijo: če želimo pokazati, da neka lastnost velja za vsako naravno število, pokažemo dvoje.

1. pokažemo, da lastnost velja za $n = 1$ - baza indukcije
2. pri pogoju, da velja lastnost za naravno št. $n$ pokažemo, da velja tudi za naravno števila $n+1$ - indukcijski korak

- Če dokažemo bazo ind. in ind. korak, smo dokazali, da lastnost velja za vsako naravno število.

Primer: $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Dokaž te formule z mat. indukcijo

- 1. $n=1$ L: $1\cdot 2 = 2$

  D: $\frac{1\cdot(1+1)(1+2)}{3} = 2$ ✓

2. $n \mapsto n+1$ Privzemimo, da formula velja za $n$

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Ali lahko s pomočjo tega podatka pokažemo, da velja tudi za $n+1$

$$\underbrace{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \dots + n(n+1)}_{\text{po predpostavki}} + (n+1)(n+2) =$$

$$\downarrow$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} =$$

bo naravno, ker so 3 zap. naravna št. eno bo deljivo s 3.

$$= \frac{(n+1)(n+1+1)(n+1+2)}{3} \leftarrow$$

to je desna stran enačbe, pri čemer imamo za $n$ vrednost $n+1$

Smo dokazali

- cela števila

$\mathbb{Z} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

V množici celih števil obstaja nevtralni element za seštevanje

$a + 0 = a, \quad a \in \mathbb{Z}$

za vsak element obstaja nasprotni element

$a + (-a) = 0$

?

- racionalna števila

$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \}$

Def: Mn. ulomkov je mn. racionalnih števil.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, če je

$a \cdot d = b \cdot c$

Če dana množica ne zadošča vsem lastnostim, ki jih potrebujemo, potem jo lahko razširimo, pri čemer more veljati

- prvotna mora biti vsebovana v razširjeni množici
- lastnosti prvotne mn. veljajo tudi v razširjeni
- razširjena mn. ima lastnosti, ki jih potrebujemo

Množico $\mathbb{Q}$ uredimo s predpisom

$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, če je $ad \leq bc$

Če identificiramo $\frac{n}{1}$ z naravnim številom $n$, vidimo, da je $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$.

Seštevanje in množenje definiramo s predpisom

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{a}{b} + \frac{b}{c}$

Lastnosti $\mathbb{N}$ veljajo tudi v $\mathbb{Q}$.

$\left( \frac{n}{1} \frac{m}{1} = n \cdot m \; ; \; \frac{n}{1} + \frac{m}{1} = \frac{n \cdot 1 + m \cdot 1}{1} \right)$

Velja 1 je nevtralni element za množenje $1 \cdot a = a$ in za vsak $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ $a \neq 0$, obstaja nasprotni element za množenje (obratni)

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$

Za razširjeno množico veljajo potrebne lastnosti.

Lastnosti:

- množica $\mathbb{Q}$ ni diskretna. Velja, da med poljubnima ulomkoma $a/b$ in $c/d$ vedno lahko najdemo še en ulomek. !

npr.: $\frac{a}{b} < \frac{ad+bc}{2bd} < \frac{c}{d}$

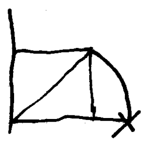
To lastnost imenujemo <u>gostost</u>. $\boxed{\mathbb{Q} \text{ je gosta množica.}}$

- realna števila

Če narišemo številsko premico, lahko vsak ulomek predstavimo s točko na njej. Vendar ni vsaka točka na številski premici predstavljena z ulomkom.

Dokaz: Evklid

Narišimo kvadrat s stranico 1. Diagonala. Dolžino diagonale označimo z D, pokažimo, da D ni racionalno število. To bomo dokazali z metodo dokazovanja s protislovjem.



Privzemimo, da je $d \in \mathbb{Q}$. $d = a/b$, $a/b$ je okrajšan ulomek. Ker je d dolžina diagonale, ker je po pitagorovem izreku $1^2 + 1^2 = d^2$
$d^2 = 2$.

$\frac{a^2}{b^2} = 2$

$a^2 = \underbrace{2b^2}_{\text{sodo}}$ število, potem je $a^2$ sodo in zato a sodo število.

Potem lahko a zapišemo kot $a = 2k$

$(2k)^2 = 2b^2$
$4k^2 = 2b^2$
$2k^2 = b^2 \rightarrow$ b je potem tudi sodo

a je sodo in b je sodo št.

Ker je $a/b$ okrajšan ulomek, smo prišli do protislovja. Torej d ni ulomek.

Na številski osi obstajajo tudi števila, ki niso ulomki. 1

Def: Množico racionalnih števil razširimo do množice realnih števil - množica $\mathbb{R}$ je v bijektivni relaciji s točkami na številski premici.

- Vsaki točki na št. premici lahko priredimo neko realno število

Množica $\mathbb{R}$ je polna (poljubno blizu), nobeno št. ne manjka

Opomba: Realna števila, ki niso racionalna, imenujemo iracionalna št.

! Opomba: Množica naravnih števil je števno neskončna, vsaka množica, ki je v bijektivni zvezi z množico $\mathbb{N}$, je tudi števna (če obstaja bijektivna preslikava med množico in $\mathbb{N}$, je ta množica števna). Množica $\mathbb{Q}$ je števna

Množica $\mathbb{R}$ ni števna. $\mathbb{R}$ števil je veliko več, kot naravnih.

Realna števila ponavadi predstavimo z decimalnim zapisom

$r = b_n \cdot 10^n + b_{n-1} \cdot 10^{n-1} \ldots + b_1 10 + b_0 + a_1 \cdot 1/10 + a_2 1/10^2 + \ldots$

Če je število iracionalno, je zapis vedno neskončen.

Pri ulomkih je zapis končen ali periodično neskončen.

Decimalni zapis, binarni zapis

Včasih uporabljamo tudi binarni zapis

$r = c_n 2^n + C_{n-1} 2^{n-1} + \ldots + C_1 \cdot 2 + C_0 + d_1 \cdot 1/2 + d_2 \cdot 1/2^2 + \ldots$

Primer: $\frac{27}{16} = 1\frac{11}{16} = 1{,}1011_{(2)}$

Absolutna vrednost

Def: Naj bo $r \in \mathbb{R}$, potem je njegova abs. vrednost

$|r| = r \quad (r \in \mathbb{R}^+)$
$|r| = -r \quad (r \in \mathbb{R}^-)$

Velja: 1. $|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

2. $|a+b| \leq |a|+|b|$

$||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$

Velja tudi splošneje

$|a_1+a_2+\ldots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$

Če želimo poiskati rešitev enačbe

$x^2=-1$

ugotovimo, da v množici $\mathbb{R}$ ta enačba nima rešitve

$x^n a_n + x^{n-1} a_{n-1} + \ldots + x a_1 + a_0 = 0$

Enačba mora imeti rešitve, zato razširimo množico števil.

Def.: $\boxed{\text{Kompleksno število je urejen par realnih števil } (a,b)}$

Prvo $\mathbb{R}$ število a imenujemo <u>realni del</u> kompleksnega števila $(a,b)$, drugo $\mathbb{R}$ število b pa imenujemo <u>imaginarni del</u> $(a,b)$.

$a = \mathrm{Re}\,(a,b)$
$b = \mathrm{Im}\,(a,b)$

Za kompleksna števila definiramo relacije

$(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$

$$\boxed{(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)}$$ !

Da veljajo lastnosti preverimo, da veljajo komutativnost, asociativnost, distributivnost.

Če identificiramo $\mathbb{R}$ število $a$ s kompleksnim številom $(a, 0)$, vidimo, da so realna števila vsebovana v množici kompleksnih števil $\mathbb{C}$ in velja

$$a+b = (a,0)+(b,0) = (a+b, 0)$$
$$a \cdot b = (a,0)\cdot(b,0) = (ab-0, 0)$$

Torej razširitev ohranja vse lastnosti množice $\mathbb{R}$

Def.: Kompleksno število oblike $(0,b)$ imenujemo čisto imaginarno število.

Označimo: $(0,1) = i$

Velja: $\boxed{i \cdot i} = (0,1)\cdot(0,1) = (-1, 0) = \boxed{-1}$

$b \in \mathbb{R}$, $b \cdot i = (b,0)(0,1) = (0,b)$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a + bi = (a,0)+(0,b) = (a,b)$

Sledi: vsako $\mathbb{C}$ lahko zapišemo v obliki $\boxed{(a,b) = a+bi}$ pri čemer velja $a, b \in \mathbb{R}$ in $i^2 = -1$

lahko zapišemo

$$(a+ib) + (c+id) = a+c+i(b+d)$$

in

$$(a+ib)(c+id) = ac-bd + i(bc+ad)$$

Velja:
$$\boxed{\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ i^5 &= i \end{aligned}}$$
perioda 4

Primer: $i^{2007} =$

$2007 : 4 = 501$
3 ost

$$i^{2007} = i^{4\cdot 501 + 3} = (i^4)^{501} \cdot i^3 = -i$$

Def: Naj bo $(\alpha = a+ib) \in \mathbb{C}$. Potem je konjugirano število $\bar{\alpha}$

$$\boxed{\bar{\alpha} = \overline{a+bi} = a - ib}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{(\overline{\alpha})} &= \alpha \\ \overline{\alpha\cdot\beta} &= \overline{\alpha}\cdot\overline{\beta} \\ \overline{\alpha+\beta} &= \overline{\alpha}+\overline{\beta}\end{aligned}}$$

! $\alpha + \overline{\alpha} = a + ib + a - ib = 2a = 2\,\mathrm{Re}\,\alpha$

! $\alpha - \overline{\alpha} = a + ib - a + ib = 2i\underbrace{b}_{\mathrm{Im}\,\alpha} = 2\,\mathrm{Im}\cdot i$ !

$$\boxed{\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}}$$

Opomba: Število $\alpha \in \mathbb{C}$ je realno število natanko tedaj, ko je $\boxed{\alpha = \overline{\alpha}}$

$$\begin{aligned} a + bi &= a - bi \\ bi &= -bi \\ b &= -b \\ 2b &= 0 \end{aligned}$$

Deljenje kompleksnih števil

$\alpha = a + ib$
$\beta = c + id$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Primer: za $z = x + iy$ $\quad \mathrm{Im}\frac{z}{\overline{z}}$

$$\frac{(x+iy)(x+iy)}{(x-iy)(x+iy)} = \frac{x^2+2xyi-y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2+2xy+2xy}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ \frac{i(2xy)}{x^2+y^2}$$

$$\mathrm{Im}\frac{z}{\overline{z}} = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Abs. vrednost

$\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$
Potem je $\alpha\overline{\alpha} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 = (\mathrm{Re}\,\alpha)^2 + (\mathrm{Im}\,\alpha)^2$

Def: Abs. kompleksnega števila $\alpha = a + ib$ je

$$\boxed{|\alpha| = \sqrt{\alpha \cdot \bar{\alpha}} = \sqrt{a^2+b^2}}$$

Opomba: Če je za $\alpha = a + ib$ imaginarni del $b=0$, potem je

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + 0^2} = \sqrt{a^2}$$

$$\sqrt{a^2} \neq a$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

- Velja trikotniška neenakost

$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ vsota 1. + vsota 2. je vedno večja od tretje.

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ dokaz z $/^2$, ker je ABS
- $|\bar{z}_1| = |z_1|$

- UPODOBITEV

Ker je $\mathbb{C}$ število par $\mathbb{R}$ števil, kompleksna števila upodobimo v ravnini $\mathbb{R}^2$.

Na ABS os običajno zapišemo $\mathbb{R}$ del, na ordinatno os pa im. del kompleksnega števila.

$\mathbb{C}$ število je predstavljeno s točko v ravnini

Krajevni vektor (seštevanje kompleksnih števil)

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$$

$|z| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ Abs. vrednost $\mathbb{C}$. števila je dolžina pripadajočega krajevnega vektorja, torej oddaljenost točke od koor. izhodišča.

Trikotniška neenakost velja, ker je vsota dveh stranic v $\Delta$ vedno večja ali enaka od tretje stranice.

- Primer: $z_1 = (3+4i)$
  $z_2 = (4+3i)$

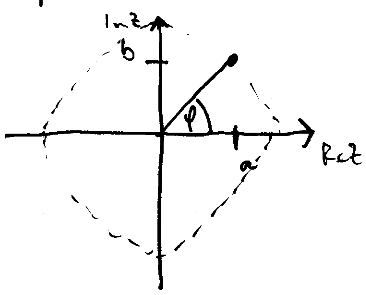
$|z_1| = 5 \quad |z_2| = 5$

$|z_1 + z_2| = |7 + 7i| = \sqrt{2 \cdot 7^2} = 7\sqrt{2}$

$|z_1| + |z_2| = 10$ dokazali smo: $|z_1 + z_2| \gg |z_1| + |z_2|$

- **Polarni zapis**

Naj bo $z = a + ib$




Kompleksno število lahko namesto s podatkoma a in b opišemo z dvema drugima $\mathbb{R}$ ~~številoma~~ – oddaljenost od izhodišča (to je $\boxed{|z|}$), drugo je kot od osi x do krajevnega vektorja v pozitivni smeri (to je polarni kot ali argument števila).

$\boxed{\varphi = \arg z}$

Velja $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

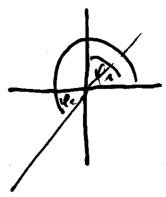
$a = \cos\varphi \cdot |z|$

$b = \sin\varphi \cdot |z|$

velja za vsak $\varphi$

Sledi: $\boxed{\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi}$

Pozor:



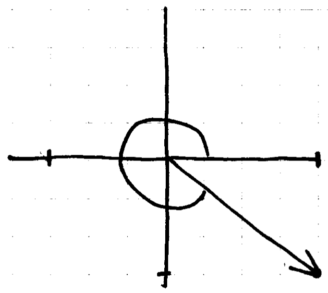

Pri določanju $\varphi$ je potrebno paziti, ker dobimo enako za $\varphi$ in $(\varphi + \pi)$ ker je $\frac{a}{b} = \frac{(-a)}{(-b)}$. Nariši skico.

Pri polarnem zapisu $|z|$ običajno označimo z $\vec{r}$
za $z=(a+ib)$ $\boxed{z = r\cdot\cos\varphi + r\cdot\sin\varphi}$

Primer: $z = 4\sqrt{3} - 4i$

$$r = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = \sqrt{4^2(3+1)} = 4\cdot 2 = 8$$

$$tg\,\varphi = b/a$$
$$tg\,\varphi = -4/4\sqrt{3}$$
$$tg\,\varphi = -1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3 \rightarrow \varphi = 5\pi/6$$



$\rightarrow$ torej $5\pi/6 + \pi$

$$z = 8\cdot(\cos(11\pi/6) + i\cdot\sin(11\pi/6))$$

Primer: $r = 3$ $\varphi = \pi/4$

$$z = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Primer: množenje in deljenje

$$z_1 = r_1\cdot(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = r_2\cdot(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)$$

$$z_1\cdot z_2 =$$
$$r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_1 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\cos\varphi_2\sin\varphi_2)$$

adicijski izreki

$$z_1\cdot z_2 = r_1 r_2((\cos(\varphi_1+\varphi_2)) + (i\sin(\varphi_1+\varphi_2)))$$

Splošno:

! $z_1\cdot z_2\cdot z_n = r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_n\cdot(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i\sin(\varphi_1\ldots\varphi_n))$

V posebnem primeru, ko je $z_1 = z_2 = z_n$, dobimo

$$\boxed{z_1\cdot z_2\cdot z_n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

Primer: $z = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$z^6 = ?$

$r = \sqrt{\frac{9\cdot 2}{4} + \frac{9\cdot 2}{4}} = 3$

$\arg z = \; b/a = 1 \;\to\; \varphi = \pi/4$ skica!

$z^6 = r^6\cdot(\cos(6\pi/4) + i\sin(6\pi/4))$
$z^6 = 3^6\cdot(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2))$
$z^6 = 3^6\cdot(0 + i(-1)) = -i\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = \underline{-729i}$

## Deljenje:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \boxed{\frac{r_1(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))}{r_2}}$$

formula za razliko kotov

## Koreni:

Naj bo $p/q$ racionalno št. in $z$ kompleksno št.

Iščemo kompleksno št. $w$, tako da je $\underline{w = z^{p/q}}$

Iščemo tisto $w$, da je $\boxed{w^q = z^p}$

Torej koren $\mathbb{C}$ števila ne bo enolično določen.

$z^{p/q}$ $\quad w = z^{p/q}$ $\quad 4^{1/2} = 2$

$x^2 = 4 \to 2, -2$

$w^q = z^p$

Zapišimo dano $\mathbb{C}$ število $z$ in iskano $w$ v polarni obliki

$w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

Ker je $w^q = z^p$, je

$\rho^q(\cos q\varphi + i\sin q\varphi)$ $\quad \boxed{r^p(\cos p\alpha + i\sin p\alpha)}$

Sledi $\rho^q = r^p \to \rho = r^{p/q}$ $\quad \cos x = \cos y \to x = 2k\pi,$

in $q\varphi = p\alpha$ Sledi: $\varphi = \frac{p\alpha + 2k\pi}{q}$

izračun korena komp. števila

Primer: $i^{-1/3}$ $w^3 = i^{-1} = 1/i$

$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$ $p = -1$ $q = 3$

$\arg i = \pi/2$

$w_k = 1^{-1/3}\left(\cos\frac{-1\cdot\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)$

$k = 0, 1, 2$

$w_0 = \cos -\pi/6 + i\sin -\pi/6 = \sqrt{3}/2 - 1/2\, i$
$w_1 = \cos \pi/2 + i\sin \pi/2 = i$
$w_2 = \cos 7\pi/6 + i\sin 7\pi/6 =$

Zaporedja, številske vrste

Def: zaporedje števil je preslikava $\boxed{f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}.}$
Vrednost $f(n)$ pove, katero število je na n-tem mestu v zaporedju.

$f(n) = a_n$

Primer: $\boxed{f(n) = \frac{n}{3}}$

$a_1 = 1/3$ $a_2 = 2/3$ $a_3 = 3/3$ $a_4 = 4/3$ ...

Zaporedje je torej: 1/3, 2/3, 3/3, 4/3, 5/3, 2, ...

Zaporedje podamo:

1. eksplicitno $a_n = f(n)$

$a_n = \frac{n}{3}$ $b_n = (n^2 - 1)/n$

2\. rekurzivno

$a_n = g(a_{n-1})$ Člen je podan kot funkcija prejšnjega člena oz členov.

Primer:

~~...~~ $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$
$a_1 = 1$

$a_1 = 1$
$a_2 = 2$
$a_3 = 4$
$a_4 = 8$

$a_n = 2^{n-1}$

Primer: $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ Fibonaccijevo zaporedje

$a_1 = a_2 = 1$

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = 3$
$a_4 = 5$

Def: Zap. $a_1, a_2, a_3 \ldots$ pišemo tudi v obliki $\{a_n\}\ n \in \mathbb{N}$

Zap. $a_n$ je navzgor omejeno, če obstaja tako število $M \in \mathbb{N}$, da so vsi členi manjši ($a_n < M$)

Zap. $a_n$ je navzdol omejeno, če so vsi $a_n > a_m$ za vsak $n \in \mathbb{N}$

~~Opomba~~:

Def: Naj bo $a_n$ navzgor omejeno, potem je natančno zgornja meja najmanjša izmed vseh zgornjih mej.
To je supremum zaporedja ~ natančna

$M_0$ je natančna zgornja meja, če jo zmanjšamo za $\varepsilon_0$, najdemo člen zaporedja, ki je večji od te $M_0 - \varepsilon_0$

19

Def: Naj bo zaporedje $a_n$ navzdol omejeno. Potem je natančna spodnja meja največja izmed vseh spodnjih mej. Natančno sp. mejo imenujemo infimum zaporedja in pišemo $\inf a_n$.

Velja: če je $m_0$ infimum od $a_n$, potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da je $a_{n_0} < m_0 + \varepsilon_0$

Primer: $a_n = \frac{1}{n}$

$1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5$

$M = 1$
$m = 0$

$\inf a_0 = 0$

Primer: $a_n = 2^n$

$m = 0$
$\inf a_n = 2$

Def: Če za zaporedje $a_n$ velja, da je $a_{n+1} \geq a_n$, potem tako zaporedje imenujemo monotono naraščajoče

Če velja $\boxed{a_{n+1} > a_n}$ je zap strogo monotono naraščajoče.

Če velja, da je $\boxed{a_{n+1} \leq a_n}$ je zaporedje monotono padajoče.

Če velja $\boxed{a_{n+1} < a_n}$ je strogo padajoče

$a_n = 2^n$ strogo naraščajoče

$a_n = (-2)^n$ ni ne naraščajoče, ne padajoče

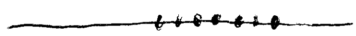
Št $a$ je stekališče zap $a_n$, če za vsak $\boxed{\varepsilon > 0}$ obstaja nek $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $a_{n_0} \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

20

Število $a$ je stekališče zap $a_n$, če za vsak $\varepsilon > 0$ velja $|a_n - a| < \varepsilon$ za neskončno mnogo členov zaporedja $a_n$. Če je v vsaki okolici $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ neskončno členov zaporedja

! Če je $a$ stekališče je lahko zunaj okolice $a$ še vedno neskončno členov. Primer:

$1, 1/2, 2/3, 1/3, 3/4, 1/4, 4/5, 1/5$



sodi členi $\to 0$
lihi členi $\to 1$

št. 0 ni člen zaporedja, št 1 je člen zaporedja. Zunaj okolice $(1-1/2, 1+1/2)$ je neskončno členov

## Limita

Def: Št. $a$ je limita zaporedja $a_n$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tako naravno št. $n_0$, da je $|a_n - a| < \varepsilon$ za vsak $n > n_0$.

To pomeni, da so za vsako okolico limite $a$ vsi členi zaporedja od nekje naprej v tej okolici števila $a$. To pomeni, da je zunaj vsake okolice št. $a$ kvečjemu končno mnogo členov zaporedja

Sledi:

- Če je $a$ limita zaporedja, potem je $a$ tudi stekališče. Obratno ne velja - (ni vsako stekališče limita (glej prejšnji primer)
- Zaporedje ima največ eno limito.

  Dokaz: denimo, da ima zaporedje $a_n$ 2 limiti $a$ in $b$, $a \neq b$, potem obstajata disjunktni okolici $a$ in $b$ v ~~v~~ katerih naj bi bili vsi členi od nekje naprej - protislovje.

Def: Če ima zaporedje $\{a_n\}$ limito in pravimo, da je konvergentno.
Če ni konvergentno ga imenujemo divergentno.

Opomba: zaporedje ima lahko natanko eno stekališče, ki pa ni limita

! Primer: $1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 4.$ 0 je stekališče, ni pa limita. ker je zunaj še vedno $\infty$ členov

21

- Če je zap omejeno in ima natanko eno stekališče, potem je to limita zaporedja.

- Naj bo zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno. Potem je to zaporedje omejeno. $\boxed{m \leq a_n \leq M}$.

- Naj bo zaporedje $\{a_n\}$ naraščajoče in omejeno. Potem je zaporedje konvergentno in limita zaporedja je natančna zgornja meja

- $\boxed{\text{Limito zaporedja } a_n \text{ pišemo}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ , torej v tem primeru

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a$

PRIMER

Primer: $a_n = n/n+1$

- $a_1 = 1/2$ $a_2 = 2/3$ $a_3 = 3/4$

naraščajoče ?

$a_{n+1} - a_n > 0$

$$\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 + n^2+2n}{(n+2)(n+1)} = \boxed{\frac{1}{(n+2)(n+1)}}$$ ✓ pozitivno narašča

$\boxed{a_{n+1} > a_n}$ ✓

- $a_n < 1$ → konvergentno, limita je 1

$1 - a_n = \ldots = 1/(n+1)$

Iščemo tiste člene, ki se od limite razlikujejo za manj kot 0,01.

$\boxed{|a - a_n| < \varepsilon}$ pri čemer $a = 1$ in $\varepsilon = 0{,}01$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{100} \to 100 < n+1 \to \boxed{n > 99}$ člen

Vsi členi od 100 tega dalje se od limite razlikujejo za manj kot 0,01

22

## Cauchyjev pogoj za konvergenco zaporedja

- Zap. $a_n$ je konvergentno natanko tedaj, kadar za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - a_{n+p}| < \varepsilon$ za vsak $n > n_0$ in vsak $p \in \mathbb{N}$

- Denimo, da je zap $\{a_n\}$ konvergentno, potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0$, da je $|a_n - a| < \varepsilon/2$ za vsak $n > n_0$, potem so vsi členi večji od $n_0$ znotraj intervala $(a - \varepsilon/2, a + \varepsilon/2)$, potem se razlikujejo za največji $\varepsilon$.

Naj bosta $a_n$ in $b_n$ konvergentni zap in

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{in} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

- Potem velja, da so konvergentna tudi zaporedja $(a_n \cdot b_n)$, $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n / b_n)$, če je $b \neq 0$ in

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

- $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n / b_n) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

Opomba: $\lim\limits_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

Dokaz za vsoto

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ $\qquad$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ $\qquad$ trikotniška neenakost

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \varepsilon + \varepsilon \ \boxed{\text{za vsak } n}$$

ker $a$ limita zap $a_n$, obstaja $n_0$, da $|a_n - a| < \varepsilon$ za vsak $n > n_0$.

ker $b$ limita zap $b_n$, obstaja $m_0$, da $|b_n - b| < \varepsilon$ za vsak $n > m_0$

$\max\{n_0, m_0\}$

To je ravno pogoj za konvergenco

Primeri

$$a_n = \frac{n^2+3n}{2n^2-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{2n^2-1} \Big/ n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{2-1/n^2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1+\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

- lim zaporedja z enako osnovo $a_n = c^n$, def, koliko je $a^r$ s pomočjo limite, pri čemer je r poljubno realno število.

tule manjka (knjiga 3.5 →)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Primer: $$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n/5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n/5}\right)^{-\frac{n}{5}\cdot\left(-\frac{5}{n}\right)\cdot n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n/5}\right)^{\left(-\frac{n}{5}\right)(-5)} = e^{(-5)}$$

Opomba: Velja $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

## Številske vrste

Naj bo dano poljubno zaporedje $\{a_n\}$ in zanima nas vsota tega zaporedja. Zato definiramo novo zaporedje – zaporedje delnih vsot. $\{s_n\}$

$s_1 = a_1$
$s_2 = a_1 + a_2$
$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n$

Če obstaja limita delnih vsot, obstaja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n$$

oz. konvergira. Pravimo, da lahko številsko vrsto seštejemo.

24

Primer: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

$s_1 = 1$ $\quad S_n = 2\cdot 2^{n-1} - 1 / 2^{n-1}$
$s_2 = 3/2$
$s_3 = 7/4$
$s_4 = 15/8$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2^{n-1}-1}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2$$

Primer: $1-1+1-1+1-1 \ldots$

Zaporedje delnih vsot

$s_1 = 1$
$s_2 = 0$
$s_3 = 1$
$s_4 = 0$

To zaporedje ne konvergira, ima dve stekališči 0 in 1, torej ne obstaja limita delnih vsot, torej vrsta ni konvergentna

~~3/11/7~~

Naj št. vrsta konvergira, lahko preverimo s Cauchijevim pogojem, ki se v primeru št. vrst glasi:

- za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja neko $n \in \mathbb{N}$, da je

$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ za vsak $n > n_0$ in $p \in \mathbb{N}$,

torej $|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+p}| < \varepsilon$ za vsak $n > n_0$ in $p \in \mathbb{N}$

Od tod sledi

$|a_{n+p}| = |S(n+p) - S(n+p-1) + S_n - S_n| = |S_{n+p} - S_n + S_n - S_{n+p-1}| \leq$

$|S_{n+p} - S_n| + |S_n - S_{n+p-1}|$

S pomočjo Cauchijevega pogoja smo pokazali, da v primeru, ko je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, velja $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

To pomeni, da je potreben pogoj za konvergenco vrste to, da gre $a_n$ proti 0.

Opomba: Ta pogoj je potreben, ni pa zadosten za konvergenco vrste. To pomeni, da obstajajo št. vrste, pri katerih je $\boxed{\lim_{n\to a_n} = 0}$, toda vrsta ni konvergentna.

25

Primer: $\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{n}}$  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

Velja: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, toda vsota vrste ne obstaja,

saj lahko ocenimo

$s_1 = 1$
$s_2 = 1 + 1/\sqrt{2}$
$s_n = \underbrace{1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \ldots + 1/\sqrt{n}}_{n \text{ členov}} \geq n \cdot 1/\sqrt{n} = \sqrt{n}$

To pomeni, da $\lim_{n\to\infty} s_n$ ne obstaja oz. je $\infty$, saj je

$\lim_{n\to\infty} s_n \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$

Primer: geometrijska vrsta

Splošni člen geom. vrste je

$a_n = a q^n$

vrsta pa je oblike $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a \sum_{n=0}^{\infty} q^n = a(1+q^1+q^2+q^3+\ldots)$

Delne vsote so potem:

$s_0 = a$
$s_1 = a \cdot 1$
$s_2 = a \cdot (1+q)$
$s_3 = a(1+q+q^2)$
$s_n = a(1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n)$

Velja:

$1 - q^{n+1} =$  $a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \ldots ab^{m-2} + b^{m-1})$

$= (1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^n) =$

$\Rightarrow$ sledi $1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Vsota vrste je potem $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = a \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $\to 0$

$= \Bigg\{$ $|q|<1$, da je izpolnjen pogoj

$\lim_{n\to\infty} a q^n = 0$

VSOTA = $a \frac{1}{1-q}$

Kriteriji ali šti vrsta konvergira ali ne

Privzeli bomo (do preklica), da so vsi členi vrste pozitivni

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ velja $a_n >$

- Primerjalni kriterij

Izrek: Naj bosta vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ številski vrsti, za kateri velja $a_n < b_n$ za vsak $n$.

če je $\sum b_n$ konvergentna, potem je konvergentna tudi vrsta $\sum a_n$.
če je $\sum a_n$ divergentna, je divergentna tudi vrsta $\sum b_n$

Vsota

$$\begin{array}{ccccccc} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + & a_2 + & a_3 + & a_4 + & \ldots + & a_n \\ \wedge & \wedge & \wedge & \wedge & & \wedge \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + & b_2 + & b_3 + & b_4 + & \ldots + & b_n \end{array}$$

- Kvocientni kriterij

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta, za katero velja, da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$$

Potem je vrsta $a_n$ konvergentna.

Dokaz: Definiramo novo vrsto

$$b_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$b_1 = a_1$
$b_2 = a_1 \cdot q$
$b_2 = a_1 q^2$

$$\frac{a_2}{a_1} \leq q \rightarrow a_2 \leq q a_1$$

$$\frac{a_3}{a_2} \leq q \rightarrow a_3 \leq q a_2 \leq q^2 a_1 = b_3$$

$$a_4 \leq q^4 a_1 = b_4$$

Po primerjalnem kriteriju, je konvergentna tudi vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Vrsto $a_n$ smo primerjali s konvergentno geometrijsko vrsto $b_n$.

Še lažji za preverjanje konvergence je naslednji izrek

Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ št. vrsta s pozitivnimi členi in naj bo $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = L$. Če je $L<1$, je vrsta konvergentna, če je $L>1$, potem divergira, če je $L=1$ pa ne vemo

Primer: $\sum_{n=1}^{\infty} n!/n^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left((n+1)n!/(n+1)^{n+1}\right)/\left(n!/n^n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{(n+1)}\,n^n}{(n+1)^{\cancel{n+1}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right)^{\frac{1}{-(n+1)}\,n} =$$

$$= e^{\frac{n}{-n-1}} = e^{\frac{1}{-1-\cancel{\frac{1}{n}}}} = e^{-1}$$

$e^{-1} < 1$, vrsta konvergira

Primer: TRDITEV

Harmonična vrsta, to je $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$ je divergentna

Dokaz:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

Kvocientni kriterij v tem primeru ne pove ničesar o konvergenci vrste. – dokaz na drugačen način

Oglejmo si naslednjo vsoto

$$\cancel{a_n} + a_{n+1} + \ldots + a_{2n} = \cancel{\tfrac{1}{n}} + \underbrace{\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ členov}} > n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

najmanjši

Če harmonično vrsto razdelimo na več poddelov, pri čemer je vsota vsakega dela večja od 1/2, potem vidimo, da vrsta konvergira.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\dots$$

$$\underset{1/2}{\underset{\vee}{a_1}}+\underset{1/2}{\underset{\vee}{a_2}}+\underbrace{a_3+a_4}_{\Sigma>1/2}+\underbrace{\dots}_{\Sigma>1/2}$$

Seštevamo 1/2. Dobimo lahko poljubno veliko število. Torej je vrsta divergentna.

- Korenski kriterij

Če za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ velja $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$

$q<1$ konvergentna
$q>1$ divergentna
$q=1$ ne vemo

• Primer:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+n}\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+n}=0$$

vrsta konvergira.

• Pri konvergenci vrst bomo uporabljali tudi integralski kriterij, ki ga bomo obravnavali kasneje.

Absolutno in pogojno konvergentne vrste

V nadalje so lahko členi vrste tudi negativna števila.

- Def.: Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutno konvergentna, če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

- Izrek: Če je vrsta absolutno konvergentna, potem je tudi konvergentna.

- Dokaz: Naj bo vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna, torej $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Zanima nas, ali je konvergentna tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

29

s Cauchijevim pogojem preverimo konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$

$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$ po Cauchijevem kriteriju za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- Def.: Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ pa divergira, potem pravimo, da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna vrsta.

- Def.: Če se v vrsti vsota $a_n$ izmenjujejo pozitivni ali negativni členi, potem pravimo, da je vrsta alternirajoča

- Primer: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, -\frac{1}{64} \dots$

- Izrek: (Leibnizov izrek) Alternirajoča vrsta je konvergentna, če gredo njeni členi po absolutni vrednosti proti 0 in velja $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

- Dokaz: Ugotavljamo konvergenco vrste $a_1 + a_2 + \dots a_n$, $a_n > 0$

Velja $s_{2n} = \underset{\geq 0}{(a_1 - a_2)} + \underset{\geq 0}{(a_3 - a_4)} + \underset{\geq 0}{(a_5 - a_6)} + \dots$

Sode delne vsote naraščajo.

$s_n = a_1 - (\underset{\geq 0}{(a_2 - a_3)} + \underset{\geq 0}{(a_4 - a_5)} + \underset{\geq 0}{(a_6 - a_7)} + (a_{2n} - a_{2n+1}))$

Lihe delne vsote padajo.

$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Sledi: sode delne vsote naraščajo in so omejene, lihe padajo in so omejene, obe konvergirata, skupni limiti

Primer:

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Vrsta ni absolutno konvergentna, saj je vsota

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

in je harmonična vrsta, ki divergira. Po leibnizovem kriteriju pa je konvergentna, saj je $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = 0$. Vrsta je pogojno konvergentna.

- Opomba: pri pogojno konvergentni vrsti lahko z zamenjavo vrstnega reda členov dosežemo, da je vsota vrste katerokoli število.

- Primer: Označimo vsoto vrste $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots = S$. Zamenjamo vrstni red členov na naslednji način

!

$$\overbrace{1 - 1/2}^{1/2} - 1/4 + \overbrace{1/3 - 1/6} - 1/8 + \overbrace{1/5 - 1/10} - 1/12 + 1/7 -$$
$$- 1/7 - 1/16 + \ldots$$

$$= 1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 - 1/10 - 1/12 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\right) = \frac{1}{2} S$$

- Opomba: Podobno kot vrste lahko definiramo neskončni produkt z zaporedjem delnih produktov.

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_i = \lim_{i\to\infty} P_i \qquad P_i = p_1 \cdot p_2 \cdots p_i$$

31

(I)

# Funkcije ene spremenljivke

## – Osnovni pojmi

Obravnavali bomo $\mathbb{R}$ funkcije, torej funkcije $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$

D imenujemo definicijsko območje,

- $Zf = \{f(x) ; x \in D\}$ je zaloga vrednosti,

$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) ; x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$ graf.

## – Lastnosti

1. eksplicitno $y = f(x)$

   npr.: $y = \sqrt{1-x^2}$

2. implicitno

   $F(x,y) = 0$, npr.: $x^2 + y^2 - 1 = 0$

3. paramatrični zapis, npr.:

   $x = \cos(t)$ $y = \sin(t)$

## – TRDITEV

- Če je f injektivna funkcija, potem katerakoli vzporednica z osjo x seka graf funkcije največ enkrat.
- Če je surjektivna, potem vsaka vzporednica z osjo x seka graf funkcije vsaj enkrat.

## Inverzna funkcija

Def: funkcija $f: D \to \mathbb{R}$ naj bo injektivna funkcija. Potem obstaja $\boxed{f^{-1}: Zf \to D}$ tako da velja $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, torej $f^{-1} \circ f =$ identiteta.

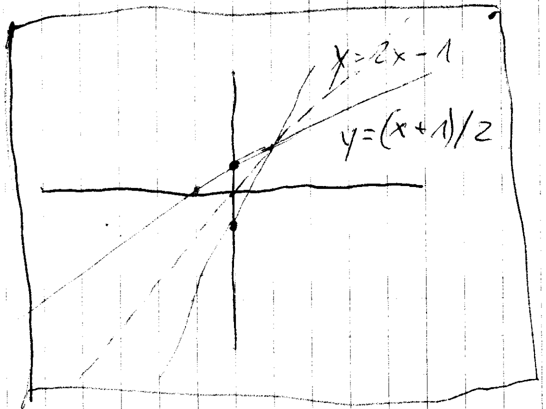
Inverzno funkcijo izračunamo tako, da v predpisu zamenjamo vlogi x in y in izrazimo y.

Primer: $f(x) = 2x - 1$

$$y = 2x - 1 \longrightarrow x = 2y - 1$$
$$2y = x + 1$$
$$y = (x+1)/2$$

Torej $f^{-1}(x) = (x+1)/2$

32




graf inverzne funkcije je simetričen glede na simetralo lihih kvadrantov

- Kompozitum funkcij   $f: D_1 \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$   $g: D_2 \to \mathbb{R}$, $D_2 \supset Z_f$

$(g \circ f): D_1 \to \mathbb{R}$, $D_1 \subset \mathbb{R}$
in $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Primer: $f(x) = 2x - 1$
$g(x) = 3x + 2$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x+2) = 6x + 3$

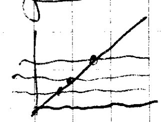
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-1) = 6x - 1$

Vidimo $\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$

- Definicije

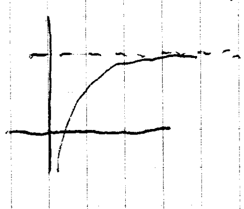
- Funkcija f je omejena če obstaja $M \in \mathbb{R}$, tako da je $f(x) \leq M$ za $\forall x \in D$
- Funkcija f je naraščajoča, če $\boxed{f(x) \leq f(y)}$ za $\boxed{x < y}$ ~~če je~~
in je strogo naraščajoča, če je $f(x) < f(y)$ za $x < y$
- Podobno definiramo padajoče funkcije
- Funkcija je monotona če je bodisi naraščajoča, bodisi padajoča in je strogo monotona, če je bodisi strogo naraščajoča, bodisi strogo padajoča.
- Strogo monotone funkcije so injektivne.

!



Seka enkrat

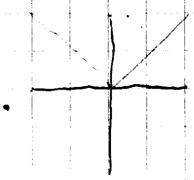
- Opomba: Strogo monotona funkcija ni nujno surjektivna



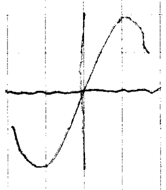
33

Def: $f: D \to \mathbb{R}$ je soda, če je $f(x) = f(-x)$ za $\forall x \in D$, liha, če je $f(-x) = -f(x)$

! Graf sode funkcije je simetričen glede na ordinatno os.



Graf lihe funkcije je simetričen glede na izhodišče.



Opomba: večina funkcij ni ne sodih, ne lihih.

Def.: Naj bosta $f$ in $g: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.
Potem lahko definiramo nove funkcije s predpisom

- $(f \mp g)(x) = f(x) \pm g(x)$
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f}{y}(x)$ $\quad g \neq 0$, $x \in D$

Pregled elementarnih funkcij

1. $f(x) = c$ konstantna funkcija
2. $\boxed{f(x) = x \quad \text{identiteta}}$
3. $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x + a_0$ $\quad$ Polinom (cela racionalna funkcija)

- stopnja polinoma $p$ je njegova največja potenca
- ničle polinoma $p(x)$ so tista števila, ki so rešitev enačbe $p(x)=0$
- Polinom stopnje $n$ ima največ $n$ realnih ničel
Dokaz opustimo.

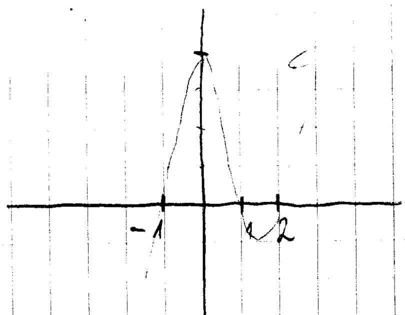
Opomba: Za polinome stopnje 5 ali več se da poiskati vse ničle samo numerično

Denimo, da ima polinom $n$-te stopnje $n$ ničel, ki jih označimo z $x_1, x_2, \ldots, x_n$
Potem ga lahko zapišemo v obliki

$$\boxed{p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}$$

Če nastopi faktor $(x-x_i)$ k-krat v zapisu, pravimo, da je $x_i$ k-kratna ničla tega polinoma

Primer: $p(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 2(x+1)(x-1)(x-2)$




4. Racionalna funkcija je kvocient dveh polinomov

$$\boxed{r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}}, \quad p \text{ in } q \text{ polinoma}$$

Racionalna funkcija $r$ je definirana za vsako $\mathbb{R}$, razen v ničlah polinoma $q$

Primer $\quad r(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = x+1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, toda $r(x)$ lahko dobro definiramo tudi za $x = 1$ s predpisom $r(1) = 2$ in potem je $r$ definirana za vsak $x \in \mathbb{R}$

Trditev: če je $x_0$ ničla polinoma $q$, ni pa ničla polinoma $p$, $q(x_0) = 0$, $p(x_0) \neq 0$, velja $r(x) = p(x)/q(x)$ v okolici $x_0$ neomejena.

Pravimo, da ima $r$ v točki $x_0$ navpično asimptoto.

Če želimo vedeti, kaj se dogaja z vrednostmi $r(x)$, ko gre $x \to \pm\infty$, si ogledamo kvocient in ločimo

– če je $\boxed{\text{stopnja } p(x) < \text{stopnja } q(x)}$

$r(x) = \frac{a_n x^n \ldots}{b_m x^m \ldots}, \quad m > n$.

Delimo z $x^n$.

$$\frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n}}{b_m x^{m-n}(\ldots + b_0\, 1/x^n)} \xrightarrow{x \to \infty} 0$$

2. st. $p(x) \geq$ st. $q(x)$ ☆

$\cancel{R}\ r(x) = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + \dots$ ostanek gre po točki 1 proti 0

Polinom $p(x)$ delimo s $q(x)$ in dobimo

Torej se za velike $x$ funkcija obnaša približno kot izraz ☆

Primer: $r(x) = \dfrac{x - \frac{1}{2}x^2}{x+3}$

1. ničle:

$$x - \frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$x\left(1 - \frac{1}{2}x\right) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$

2. asimptote: $x = -3$ (navpična)

3. Asimptote

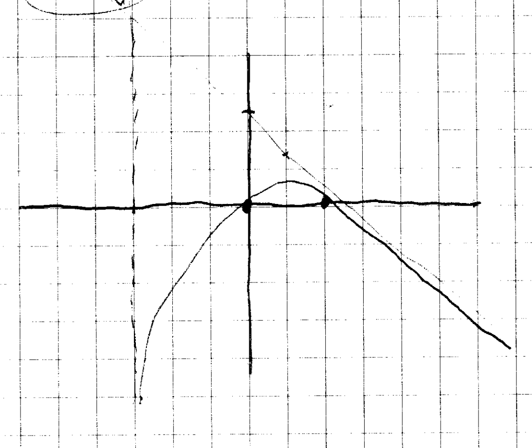
$$\left(-\frac{1}{2}x^2 + x\right) : (x+3) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - \frac{15/2}{x+3}$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$$

$$\frac{5}{2}x$$

$$\frac{5}{2}x + \frac{15}{2}$$

$$-15/2$$



# Iracionalne funkcije

Primer: $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$y = \sqrt[7]{1 - x^2 - x^5}$$

- Iracionalne funkcije so podane z enačbo

$A_n(x)$

Pri čemer so $A_i(x)$ polinomi spremenljivke $x$.

Z enačbo je funkcija podana implicitno.

Primer:

$A_7(x) = 1$
$A_0(x) = x^5 + x^2 - 1$

Torej
$$y^7 + x^5 + x^2 - 1 = 0$$
$$y^7 = 1 - x^2 - x^5$$
$$y = \sqrt[7]{1 - x^2 - x^5}$$

Opomba: vsako racionalno funkcijo lahko zapišemo v obliki enačbe

$$\boxed{A_1(x)\,y + A_0(x) = 0}$$
$$y = -A_0(x) / A_1(x)$$

polinom

polinom

$p(x)/q(x) \rightarrow$ racionalna f.

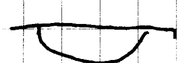
Def: Vse funkcije, ki jih lahko izrazimo z enačbo, imenujemo algebraične funkcije.

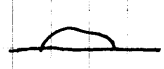
Opomba: Ker so funkcije z enačbo podane v implicitni obliki, je večkrat potrebno dodatno določiti funkcijo npr.

$$y^2 + x^2 - 1 = 0$$
$$y^2 = 1 - x^2$$

definirani dve funkciji

- $-\sqrt{1-x^2}$
- $+\sqrt{1-x^2}$





## Transcendentne funkcije

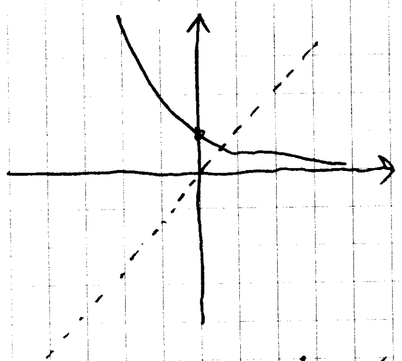
Def: Funkcije, ki niso algebraične, imenujemo transcendentne.

Obravnavali bomo:
- eksponentno
- logaritmsko
- trigonometrične
- ciklometrične
- hiperbolične
- area

### Eksponentna funkcija

$y = a^x$, $a > 0$

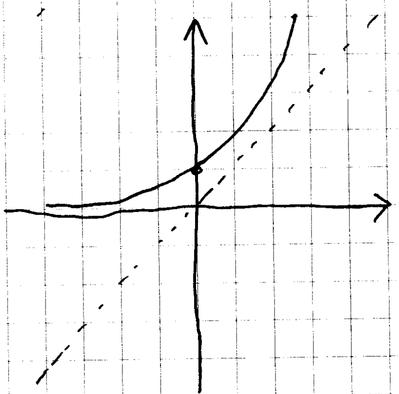
$1 > a > 0$



Eksponentna f. je strogo monotona ⇒ injektivna, lahko poiščemo inverzno f.
Ni surjektivna.

Najpomembnejša osnova je $e$, torej $\underline{\underline{y = e^x}}$

$a > 1$

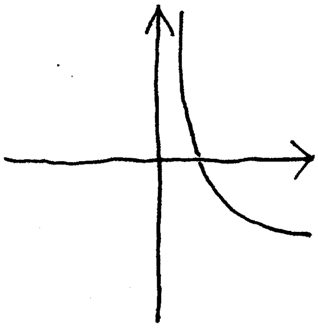


### Logaritmska funkcija

Ker je eksponentna f. injektivna, obstaja njen inverz, to je logaritmska funkcija in pišemo

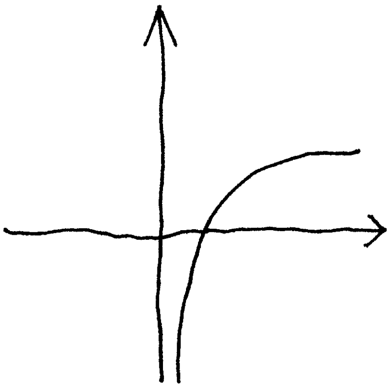
$\boxed{y = \log_a x}$

torej $\boxed{a^y = x}$



$0 < a < 1$

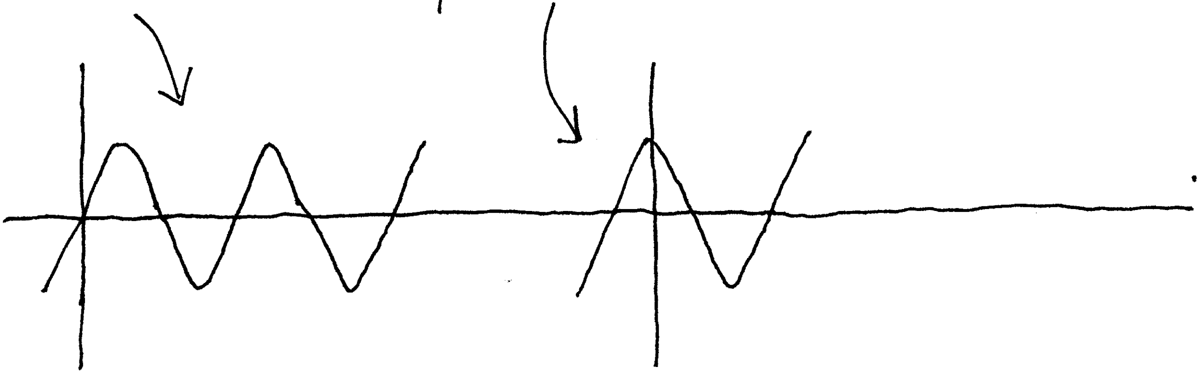
Najpomembnejša osnova $a = e$. Pišemo $y = \log_e x = \log x = \ln x$



$a > 1$

Kotne funkcije

$f(x) = \sin x$ $\quad$ $y = \cos x$



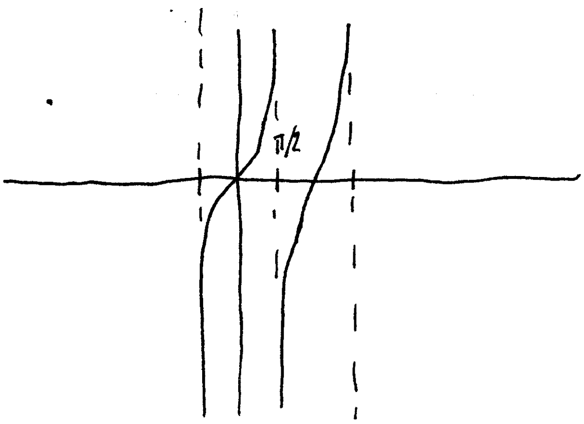
- liha, perioda $2\pi$
- ni injektivna
- ničle $k\pi$

- soda, per. $2\pi$
- ni injektivna
- ničle $\pi/2 + k\pi$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Def: $\mathbb{R}$ $\quad$ Zf: $(-1, 1)$

## $\tan x = \sin x / \cos x$




- ni injektivna

liha, liha

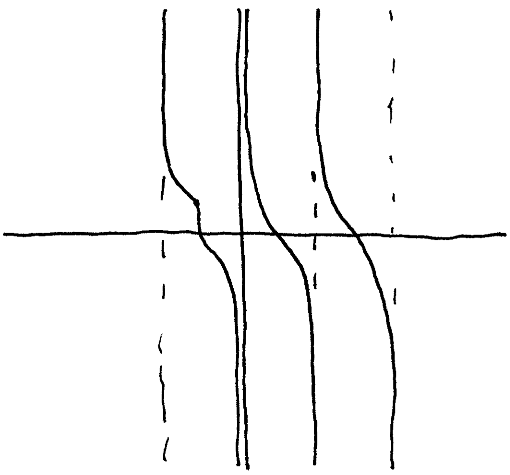
$$tg(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tg\,x$$

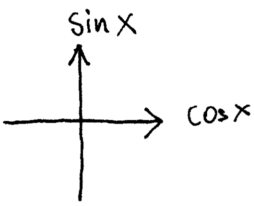
soda

- perioda: $\pi$
- ni injektivna, je surjektivna

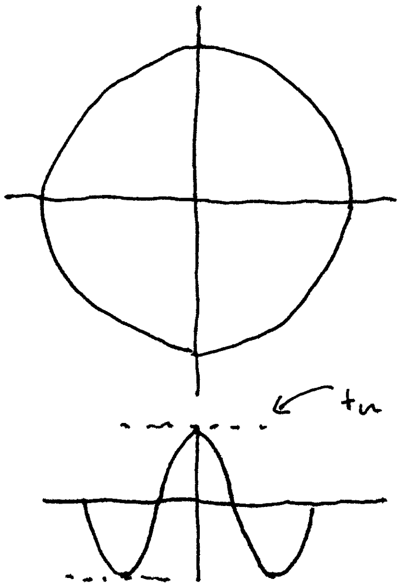
- ničle: $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- def: $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
- zf: $\mathbb{R}$

## $ctg\,x = \cos x / \sin x$





# Ciklometrične funkcije



$\cos\alpha = 1/2$

tu je injektivna

Ker trig. funkcije niso injektivne, zožimo def. območje kotnih funkcij na tako podobmočje, da je tam f. injektivna.

za $\sin x$ : $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

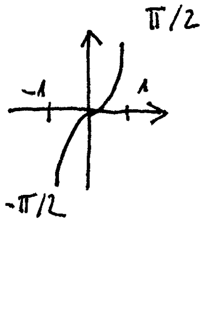
za $\cos x$ : $[0, \pi]$

$\operatorname{tg} x$ : $[-\pi/2, \pi/2]$

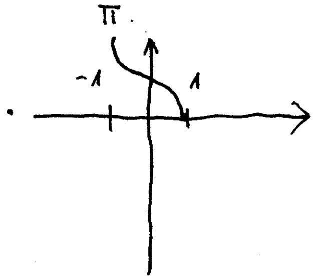
$\operatorname{ctg} x$ : $[0, \pi]$

Inverzne funkcije so potem

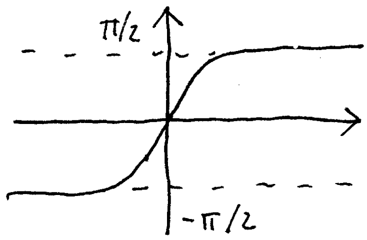
$y = \sin x$ $\qquad$ $y = \operatorname{arc} \sin x$



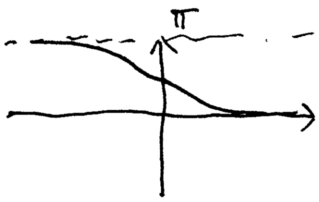
$y = \cos x$ $\qquad\qquad$ $y = \arccos x$




$y = \operatorname{tg} x$ $\qquad\qquad$ $y = \operatorname{arctg} x$




$y = \operatorname{ctg} x$ $\qquad\qquad$ $y = \operatorname{arcctg} x$




<u>Opomba:</u> Tako definirane funkcije nam dajo <u>glavno vrednost</u>. Npr. rešitev enačbe

$\cos x = 1/2$ je vsak $x$ oblike $x = \pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Toda vrednost $\arccos 1/2$ pa je samo $\pi/3$.

Velja: $x = \cos y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$

$y = \arccos x \qquad \pi/2 - y = \arcsin x \qquad /+$

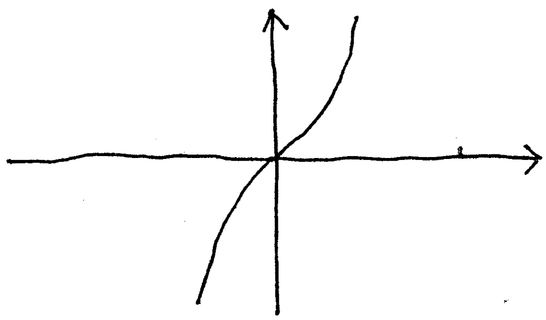
$$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \pi/2}$$

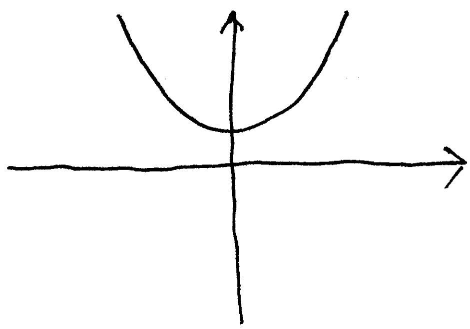
Podobno: $\boxed{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi/2}$

Hiperbolične funkcije

Hiperbolični sinus in cosinus sta definirana:

$$\boxed{\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$





Opomba: sh in ch imata veliko podobnih lastnosti kot sin in cos (sodost, lihost, zveze, dvojni koti...)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Opomba: Če definiramo krivuljo s parametričnim predpisom

$x = \cosh t$

$y = \sinh t$

$x^2 - y^2 = 1$, to pa je ravno enačba hiperbole, zato tako ime funkcije.

Podobno definiramo

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Are funkcije - inverzne funk. hip. funk.

Ker je $\sinh x$ injektivna f, obstaja njen inverz. $\sinh x$ je definirana ~~z~~ pomočjo eksp. funkcije, zato bo njen inverz izražen z logaritmom

$y = \sinh x = (e^x - e^{-x})/2$, torej rešujemo

$y = \text{Area}\sinh x$

$x = (e^y - e^{-y})/2$

Sledi: $2x = e^y - e^{-y}$

$2x = e^y - 1/e^y$

$2x e^y = (e^y)^2 - 1$

$2x e^y = e^{2y} - 1$ $\to$ pišimo $e^y = t$

$t^2 - 2xt - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x \pm \sqrt{x^2+1}$

Torej $e^y = x \pm \sqrt{x^2+1}$ (ker je $e^x$ pozitivno)

Primerjajmo: $x < \sqrt{x^2+1}$

$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$

Dobili smo $\rightarrow$ $\boxed{y = \log(x + \sqrt{x^2+1})}$

$\operatorname{Aresinh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1})$

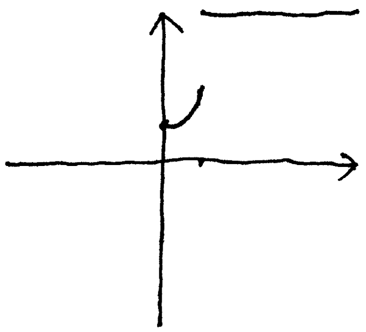
Podobno bi lahko izračunali ostale area funkcije, vendar moramo biti pazljivi, ker cosh ni injektivna.

$y = \operatorname{Areacos} x = \log(x \pm \sqrt{x^2-1}$

~~y = Areatg x = 1/2 log~~

Zveznost funkcij

Primer: $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & 0<x<1 \\ 5, & x \geq 1 \end{cases}$



Opazimo, da graf funkcije ni pretrgan

Pri majhni spremembi spremenljivke $x$ v točki 1 se je vrednost funkcije veliko spremenila. Pri zveznih funkcijah majhna sprememba spremenljivke $x$ povzroči majhno spremembo vrednosti funkcije.

Če $x_0$ spremenimo za $h$ v $x_0+h$, potem se vrednost funkcije $f(x_0)$ malo spremeni, ko izračunamo $f(x_0+h)$

Def: funkcija $f\ D \to \mathbb{R}$ je zvezna v $T(x_0)$, če za vsak $\varepsilon_0$ obstaja tak $\delta$, da je $|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$, čim je $|h|<\delta$.

Opomba: Graf zvezne funkcije ni pretrgan.

**Def:** Funkcija $f$ je zvezna z leve v točki $x_0$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon$, čim je $|h| < \delta$ za $h < 0$.

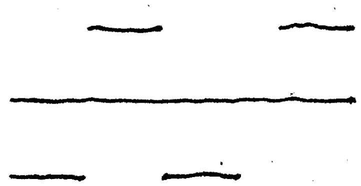
Podobno definiramo zveznost z desne, pri kateri je $h > 0$.

**Opomba:** $F$ je zvezna, če je zvezna z leve in desne.

**Def:** Fja. $f$ je zvezna, če je zvezna v vsaki točki $Df$.

**Def:** Fja $f$ je odsekoma zvezna, če je zvezna v vseh točkah $Df$ z izjemo končno ali števno neskončno točk.

**Primer:**



Signali so odsekoma zvezne funkcije

**Def:** Fja $f$ je enakomerno zvezna na $Df$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, čim je $|x_1 - x_2| < \delta$.

Opomba: Pri enakomerni zveznosti je pri danem $\varepsilon$ za vse $x$ dober isti $\delta$.

Primer: Vsaka zvezna funkcija na zaprtem intervalu je enakomerno zvezna. Dokaz opustimo.

Računske operacije z zveznimi funkcijami

Izrek: Naj bo zap. $\{x_n\}$ konvergentno z limito $x_0$, torej $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Če je zap. $\{f(x_n)\}$ tudi konvergentno in je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, potem je zvezna v točki $x_0$. Dokaz opustimo.

Izrek: Naj bosta f in g zvezni funkciji v točki $x_0$. Potem so tam zvezne tudi funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$

Dokaz: Naj bo $\{x_n\}$ zap, ki konvergira k $x_0$. Ker sta f in g zvezni, velja
$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$.

Potem velja $\lim f(x_n) + \lim g(x_n) = f(x_0) + g(x_0) = (f+g)(x_0)$
Torej je $f+g$ zvezna. Podobno za razliko in produkt.

15

Izrek: Naj bosta $f$ in $g$ zvezni v $x_0$ in $g(x_0) \neq 0$. Potem je tudi $\frac{f}{g}$ zvezna v $x_0$.

Dokaz: Podobno kot v prejšnjem primeru.

Izrek: Naj bo $f(u)$ zvezna v točki $u_0$ in $u(x)$ zvezna v točki $x_0$, kjer je $u_0 = u(x_0)$ Potem je tudi kompozitum $f \circ u$ zvezna v $x_0$. Dokaz opustimo.

Izrek: Naj bo $f$ zvezna naraščajoča funkcija na intervalu $[a,b]$. Potem ima tudi $f^{-1}$ enake lastnosti.

Def: Funkcija $f$ limitira proti vrednosti $A$, ko se $x$ bliža vrednosti $a$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je
$|f(x) - A| < \varepsilon$, čim je $|x - a| < \delta$
To zapišemo
$\lim_{x \to a} f(x) = A$.

Izrek: Funkcija $f$ je v točki $x_0$ zvezna natanko tedaj, ko je $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ !

Dokaz: Naj bo $f$ zvezna v točki $x_0$. Naj bo $x = x_0+h$. Potem je $|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon$, čim je $h<\delta$ za nek $\delta$, ker je $f$ zvezna. To pomeni, da je $\lim_{x\to x_0}(f(x_0)) = f(x_0)$

Obratno naj bo $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Po def. limite je $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ čim je $|x-x_0|<\delta$ za nek $\delta$, to pa je ravno definiciji zveznosti funkcije $f$.

Opomba: Pri zvezni funkciji lahko zamenjamo vrstni red limite in funkcije, torej

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a)$$

Za zaporedja to pomeni

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$$

Elementarne funkcije so na definicijskem območju zvezne (ali odsekoma zvezne):

1. $f(x) = c$

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(h)) = \lim_{h\to 0}(c - c) = 0$$

Funkcija je zvezna, če je $\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = 0$

2. $f(x) = x$

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(h)) = \lim_{h\to 0}(x+h-x) = \lim_{h\to 0} h = 0$$

3. Po enem izmed izrekov so potem zvezne tudi vse potence, polinomi, racionalne funkcije, iracionalne.

4. $f(x) = a^x$

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x)) = \lim_{h\to\infty}(a^{x+h} - a^x) =$$

$$= a^x \lim_{h\to 0}(a^h - 1) = 0$$

5. Inverzna je zvezna, torej je tudi logaritmska zvezna

51

6. $f(x) = \sin x$

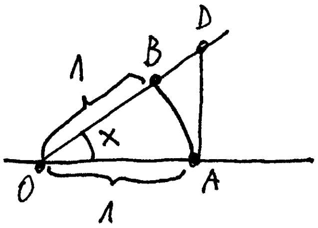
$$\lim_{h\to 0}\left(\sin(x+h) - \sin(x)\right) = \lim_{h\to 0} 2\sin\left(\frac{h}{2}\right)\underbrace{\cos\left(\frac{x+h}{2}\right)}_{\leq 1} = 0$$

7. Torej je sinus zvezna, podobno cos, tg je kvocient zveznih, zato zvezna, podobno ctg. Ciklometrične so inverzne funkcije zveznih in zato zvezne, hiperbolične sestavljene iz zveznih, zato zvezne, area funkcije so inverzne zveznih in zato zvezne.

8. Funkcija $x^r$, $r \in \mathbb{R}$ je tudi zvezna, saj je $x^r = e^{\log x^r} = e^{r\log x}$, torej kompozitum zveznih.

Primer: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

Reš.




$v/1 = v/|OB|$

$$pl\triangle OAB = \frac{1\cdot \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}$$

$$pl\sphericalangle OAB = \frac{x}{2}$$

$$pl\triangle OAD = \frac{|OA|\cdot|AD|}{2} = \frac{tg x}{2}$$

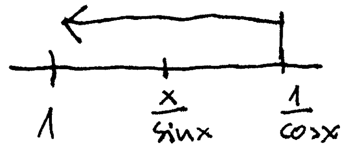
$$pl\triangle OAB < pl\sphericalangle OAB < pl\triangle OAD$$

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tg\, x}{2}$$

$$\sin x < x < tg\, x = \sin x/\cos x \qquad /:\sin x$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$x \to 0$



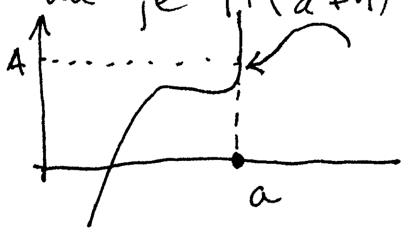
$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad , \text{ vemo } \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\frac{x}{\sin x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Primer: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} =$ $\qquad 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

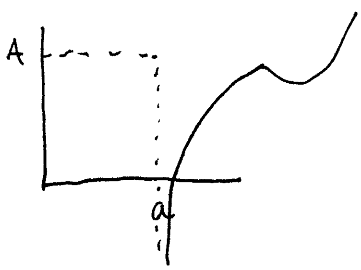
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\sin\frac{x}{2}}_{\to 0}\,\underbrace{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}_{\to 1} = 1\cdot 0$$

$= 0$

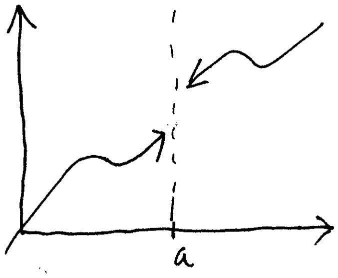
Def: Število $A$ je desna limita funkcije $f$ v točki $a$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(a+h) - A| < \varepsilon$, čim je $0 < h < \delta$



Podobno definiramo levo limito, v tem primeru je $|h| < \delta$ in $h < 0$.



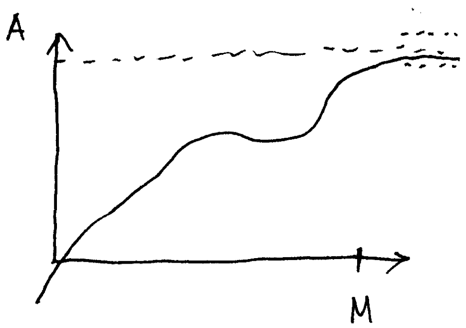
**Opomba:** Funkcija $f$ ima v točki $a$ limito $A$, če obstaja leva in desna limita funkcije $f$ v točki $a$ in sta ti dve limiti enaki.



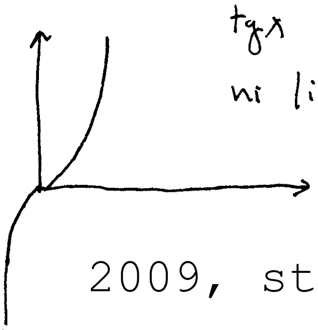

limita ne obstaja

Poglejmo si še primer limite, ko gre $x$ čez vse meje:

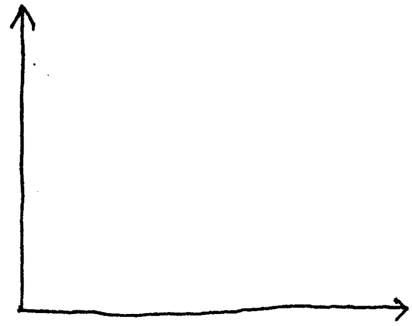
**Def:** Funkcija $f$ ima limito $A$, ko gre $x \to \infty$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja nek $M$, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$ za vsak $x > M$




**Def:** Pravimo, da je $\lim f$ neskončno, če za vsak $N > 0$ obstaja $M > 0$, da je $f(x) > N$ za $x > M$



$\operatorname{tg} x$
ni limite



Primer $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$

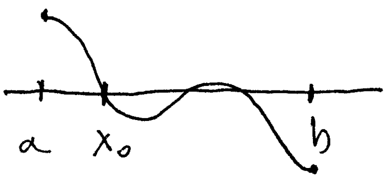
$\lim\limits_{x\to\infty} \log x = \infty$

$\lim\limits_{x\to\infty} \log x = \pi/2$

$\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{tg}\, x =$ ne obstaja

## Lastnosti zveznih funkcij

1. Naj bo $f$ zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$ in naj v krajiščih intervala zavzame nasprotno predznačeni vrednosti, potem obstaja $x \in [a,b)$, tako, da je $f(x_0)=0$




Takih točk je lahko več, zagotovo vsaj ena.

Dokaz poteka z metodo bisekcije in ga opustimo. Graf zvezne funkcije je nepretrgan.

2. Izrek: Če je funkcija $f$ zvezna na intervalu $[a,b]$, potem je na tem intervalu omejena, torej $m \le f(x) \le M$ za vsak $x \in [a,b]$

Opomba: Zvezna funkcija $f$ na odprtem intervalu ni nujno omejena, npr: $f(x) = \mathrm{tg}(x)$

3. Izrek: Naj bo f zvezna funkcija na $[a,b]$.
Potem je omejena in obstajata
$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ in $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$

ter $x_m, x_M \in [a,b]$ tako, da je
$f(x_m) = m$ in $f(x_M) = M$

Opomba: Funkcija f na zaprtem intervalu doseže natančno spodnjo in natančno zgornjo mejo.

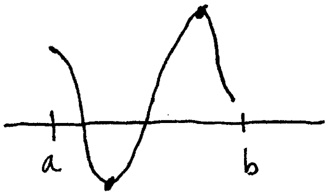
Opomba: Če interval ni zaprt, to ni nujno res.
npr: $f(x) = \mathrm{atg}(x)$ na $(-\infty, \infty)$. Se samo bliža

Dokaz s protislovjem: Denimo, da f ne doseže natančne zgornje meje M, torej $f(x) < M$ za vsak $x \in [a,b]$.
Potem definiramo novo funkcijo $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$,
ki je zvezna na intervalu $[a,b]$, torej po izreku št 2. tudi omejena. $g(x) < N$ za vsak $x \in [a,b]$.

$$\frac{1}{M - f(x)} < N \Rightarrow \frac{1}{N} < M - f(x) \Rightarrow f(x) < M - \frac{1}{N} \text{ za} \forall x \in [a,b].$$

Potem je tudi $M - \frac{1}{N}$ zgornja meja, kar je protislovje, saj je M natančna zgornja meja.
Sledi: predpostavka je bila napačna, torej res obstaja nek $x_M$, tako da je $f(x_M) = M$.
Podobno za natančno spodnjo mejo.

4. Izrek: Naj bo $f$ zvezna funkcija na $[a,b]$, potem $f$ na $[a,b]$ zavzame vsako vrednost med natančno spodnjo in natančno zgornjo mejo.



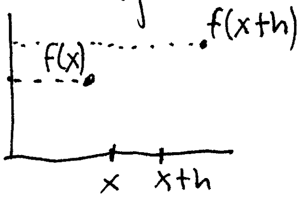

Torej za vsak $A$, za katerega $\inf f$ ~~[illegible]~~ $\inf f < A < \sup f$ obstaja $x_A \in [a,b]$, da je $f(x_A) = A$.

Dokaz: Naj bo $x_m \in [a,b]$ tak, da je $f(x_m) = \inf f(x)$ in $x_M \in [a,b] = \sup f(x)$. Obstajata po izreku 3. Če je $\inf f(x) = \sup f(x)$ je $f$ konstantna funkcija in ni kaj dokazovati.

Definiramo $g(x) = f(x) - A$ na $(x_m, x_M)$, $x_m < x_M$
Velja $g(x_m) < 0$ in $g(x_M) > 0$, potem po prvem izreku obstaja $x_A$, da je $g(x_A) = 0$, torej $f(x_A) - A = 0$, torej $f(x_A) = A$

# Odvod

Definicija:




$$\boxed{\text{Izraz } \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ imenujemo diferenčni kvocient funkcije } f \text{ v točki } x.}$$

Diferenčni kvocient lahko zapišemo tudi $\Delta f/\Delta x$, pri čemer je $\Delta f = f(x+h)-F(x)$ sprememba funkcije $f$ in $\Delta x = x+h-x = h$ sprememba spremenljivke $x$.

Def: Odvod funkcije $f$ v točki $x$ je enak limiti

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}^{*}.$$

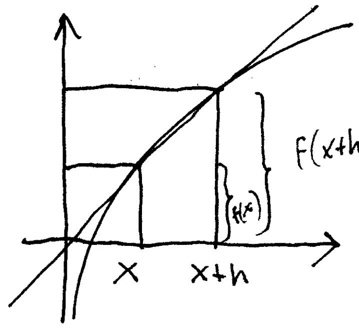
Če lim $*$ obstaja, pravimo, da je $f$ odvedljiva v točki $x$.

Opomba: Odvod funkcije nam ~~meri povprečne~~ hitrosti s katero se funkcija $f$ spreminja v točki $x$.

Primer: $f(x) = x^2$, $f'(x) = ?$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2}+2\cancel{h}x+h^{\cancel{2}}-\cancel{x^2}}{\cancel{h}} = 2x$$

Geometrijska definicija odvoda



$y = kx + n$

$f(x+h)$ $\quad k = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{\cancel{x}+h-\cancel{x}}$

diferenčni kvocient.

$h \to 0$, dobimo premico, ki je tangenta na graf funkcije, njen smerni koeficient pa je ravno odvod funkcije v točki $x$, torej $k = f'(x)$.

Opomba: $\boxed{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \operatorname{tg} \alpha}$

Smer tangente je enaka tg kota $\alpha$.

Izrek: Naj bo $f$ odvedljiva funkcija v točki $x_0$, potem je $f$ v tej točki tudi zvezna → iz odvedljivosti sledi zveznost funkcije.

Dokaz: Funkcija je zvezna v točki $x_0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ oziroma $\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)=0$

Če je funkcija v $x_0$ odvedljiva, je
$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, oziroma, če označimo

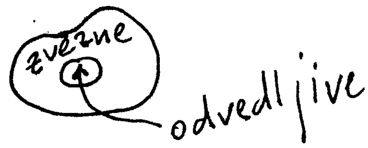
$\eta = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$ je $\lim_{h\to 0}\eta = 0$

in $f(x_0+h)-f(x_0) = f'(x_0)h + \eta h$

Torej je $\lim_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0) = \lim_{h\to 0}\left(\underbrace{f'(x_0)h}_{0} + \underbrace{\eta h}_{0}\right) = 0$,
torej $f$ res zvezna,

Opomba: Obratno ni res, Ni vsaka zvezna funkcija odvedljiva. Primer:
$f(x)=|x|$. $f$ je zvezna funkcija, ki ni odvedljiva v točki $x_0=0$, saj tam limita dif. kvocienta ne obstaja.

Leva limita dif. kvocienta v $x_0=0$ je $-1$, desna limita pa $1$. Naklon krivulje na levi je $-\pi/4$, na desni $\pi/4$, $\operatorname{tg}(-\pi/4)=-1$, $\operatorname{tg}\pi/4=1$




## Pravila za odvajanje

1. Naj bo $f(x)=c$ konstantna funkcija, potem je

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$$ <u>Odvod konstante je 0</u>

2. Naj bosta $f$ in $g$ odvedljivi funkciji, potem je odvedljiva tudi njuna vsota in razlika.
$(f+g)'=f'+g'$. $(f-g)'=f'-g'$

Dokaz: $$\boxed{(f+g)'(x)}=\lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=$$
$$=\boxed{f'(x)+g'(x)}$$

3. Naj bosta $f$ in $g$ odvedljivi, potem je odvedljiva tudi $(f\cdot g)$ in velja

$$\boxed{(f\cdot g)'=f'g+fg'}$$

Dokaz: $\boxed{(f g)'(x)} = \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h) - (f\cdot g)(x)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) + f(x+h)\cdot g(x) - f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\left(\underbrace{f(x+h)}_{f(x)} \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{g'(x)} + g(x) \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)}\right) =$

$= \boxed{f(x)\, g'(x) + f'(x) g(x)}$

4. Naj bo $f$ odvedljiva in $c$ konstanta, potem je

$\boxed{(c\cdot f)' = c\cdot f'}$ ← 3. pravilo

Dokaz: $c\cdot f' = \underbrace{c'}_{0} f + c\cdot f'$ ← 1. pravilo $= c f'$

Opomba: Velja še več $(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g(x)$,

(zato je odvajanje linearni operator).

5. Naj bosta $f$ in $g$ odvedljivi in $g(x) \neq 0$. Potem je odvedljiv tudi $f/g$ in velja

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{f(x+h)g(x) - g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - g(x+h)f(x)}{g(x+h)g(x)}\,\frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} =$$

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \to f'(x)$, $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \to g'(x)$, $g(x+h)g(x) \to g^2(x)$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

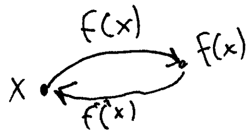
6. Če je f odvedljiva funkcija spremenljivke u, u pa odvedljiva funkcija spremenljivke x, potem je tudi:
$(f\circ u)(x)$ odvedljiva in velja
$$\boxed{f'(x) = f'(u)\,u'(x)}.$$

Dokaz: $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\Delta f}{\Delta u}}_{f'(u)}\ \underbrace{\frac{\Delta u}{h}}_{u'(x)} =$

$= \boxed{f'(u)\ u'(x)}$

7. Naj bo $y=f(x)$ taka odvedljiva funkcija, da obstaja njen inverz $f^{-1}(x)$. Potem je $f^{-1}$ tudi odvedljiva in velja $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f(x)}$

Dokaz: ker je $f(f^{-1}(x)) = x$, je po 6. pravilu potem, ko odvajamo obe strani




$f^{-1}(y)\cdot f'(x) = 1$. → Sledi $\boxed{f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}}$

Dokaz: $x' = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h} = 1$

## Odvodi elementarnih funkcij

### 1. Odvod eksponentne funkcije $y = a^x$ ✓

$y' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x\,\frac{a^h-1}{h}$ vpeljemo novo spremenljivko.

$t = a^h - 1$. ko gre $h\to 0$, gre $t\to 0$. Torej je

$y' = * = \lim_{t\to 0} a^x\,\frac{t}{\ }$

$a^h = t+1 \to h = \log_a(t+1) = \log(t+1)/\log(a)$

$\lim_{t\to 0} a^x\,\frac{t}{\frac{\log(t+1)}{\log a}} = a^x\log a\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(t+1)} = a^x\log a\cdot\frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(t+1)} =$

$= a^x\log a\,\frac{1}{\lim_{t\to 0}\log(t+1)^{1/t}} = a^x\log a\,\frac{1}{\lim_{s\to\infty}\log\left(\frac{1}{s}+1\right)^s} = \boxed{a^x\log a}$

$s = 1/t$

$t\to 0,\ s\to\infty$

$e$, $\log e = 1$

V posebnem primeru, ko je $a=e$, velja $\boxed{(e^x)'=e^x}$

## 2. Odvod logaritma $y=\log_a x$

Ker je $\log_a x$ inverzna f fje $a^x$, velja

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{a^y \log a} = \boxed{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log a}}$$

$\boxed{y=y(x),\ y^{-1}=\cancel{y}(x)=a^y=a^{\log_a x}=x}$

V posebnem primeru, ko je $a=e$ in imamo naravni logaritem, je $(\log x)' = \frac{1}{x}$

## 3. Odvod potence $y=x^r$

$$(x^r)' = \left(e^{\log x^r}\right)' = \left(e^{r \cdot \log x}\right)' = e^{r\log x} \cdot (r \log x)' = x^r \cdot r \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \boxed{r \cdot x^{r-1}}$$

## 4. Odvodi kotnih funkcij. $y = \sin x$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2}\left(\sin\left(\frac{x+h-x}{2}\right)\right) \cdot \cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cancel{h}\ \ h/2} =$$

$\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \to \cos(x)$, $\quad \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h/2} \to 1$

$$= \boxed{\cos x}$$

Podobno pokažemo, da je $(\cos x)' = -\sin x$

Dalje: $(tg\,x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$

Podobno za $(ctg\,x)'$

## 5. Odvodi ciklometričnih funkcij

Funkcijo $y = \arcsin x$ zapišemo v obliki

$\sin y = x$

$\cos y\, y' = 1$, torej $y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} =$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$y = \arccos x$ Vemo $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

$(\arcsin x)' + (\arccos x)' = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \arccos x' = 0$$

$$(\arccos x)' = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$\underline{y = \operatorname{arc\,tg} x}$

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} =$$

$$= \frac{1}{1+tg^2(\operatorname{atg} x)} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$$

$tg^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} =$

$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} =$

$= \frac{1}{\cos^2 x} - 1$

$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x}$

Podobno: $y = \operatorname{arcctg} x$, $y' = \frac{1}{1+x^2}$

6. Odvodi hiperboličnih funkcij

- $y = \cosh x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$

$y' = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x$

Podobno: $(\sinh x)' = \cosh x$

$(\mathrm{tgh})' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

$(\mathrm{ctgh}\, x)' = \dfrac{1}{\sinh^2 x}$

7. Naj bo $y = \log(x + \sqrt{x^2 + a})$

$$y' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+a}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\right) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+a}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+a}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{(x+\sqrt{x^2+a})}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x^2+a}} + x}{\sqrt{x^2+a}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}}$$

$$\log(x + \sqrt{x^2+a})' = \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$$

Tabela

- $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$
- $(a^x)' = \log a \cdot a^x$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\log_a x)' = 1/x\log a$
- $(\log x)' = 1/x$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\mathrm{tg}\,x)' = 1/\cos^2 x$
- $(\mathrm{ctg}\,x)' = -1/\sin^2 x$
- $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$
- $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$
- $(\mathrm{atg}\,x)' = 1/1+x^2$
- $(\mathrm{actg}\,x)' = -1/1+x^2$
- $(\log(x+\sqrt{x^2+a}))' = 1/\sqrt{x^2+a}$

Primer: $y = x^x$

- Odvod na 2 načina:

1. $\log y = \log x^x$

   $\log y = x \cdot \log x$

   $\frac{1}{y} \cdot y' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} \rightarrow y' = y(\log x + 1)$

   $y' = x^x(\log x + 1)$

2. $y = x^x = e^{\log x^x} = e^{x\log x}$

   $y' = e^{x\log x} \cdot (x\log x)' = e^{x\log x}(\log x + x\frac{1}{x}) =$

   $= x^x(\log x + 1)$

## Diferencial funkcije

Naj bo $f$ odvedljiva funkcija, torej

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Oglejmo si $\underbrace{\frac{\Delta f}{\Delta x}}_{\uparrow \text{diferenčni kvocient}} - f'(x) = \eta$ ← odvod za izbrani $x$ je konst

$\eta = \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x)$ in $\eta$ je za za majhne $\Delta x$ majhna.

Preoblikujemo in dobimo $\Delta f = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\nearrow} + \underbrace{\eta \Delta x}_{\uparrow}$

prod. majhnega s konstanto

Produkt dveh majhnih števil je zelo majhen

torej je $\eta \Delta x$ zanemarljivo majhen

in je glavni del spremembe $\Delta f$ enak $f'(x)\Delta x$

torej $\Delta f \approx f'(x)\Delta x$

Definiramo: Diferencial funkcije $y=f$ je $df = dy = f'(x)\Delta x$.

Če vzamemo $y=x$, dobimo $dy = dx = 1\Delta x$, torej $dx = \Delta x$

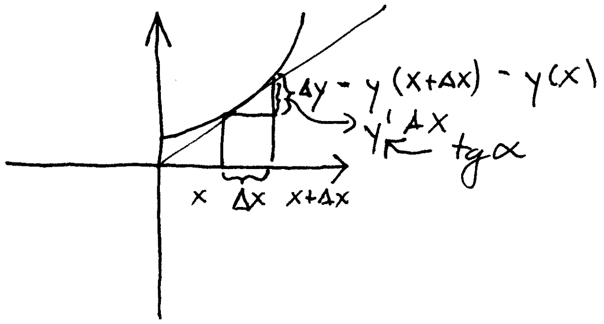
$$\boxed{dy = y'dx}$$

Odvod zato zapišemo s pomočjo diferenciala v obliki $y' = \frac{dy}{dx}$

Opomba: Odvod posredne funkcije je potem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Geom. interpretacija




Opomba: Diferencial je tista linearna preslikava, ki se najbolje prilega dani funkciji. Tangenta je tista premica, ki se najbolje prilega dani funkciji.

Primer: $\operatorname{arctg} 1'001$

$y = \operatorname{atg} x$

$y(1) = \operatorname{atg} 1 = \pi/4 = \frac{3{,}141592653 5}{4}$

$y(0{,}001) = ?$

$\Delta y = y(1'001) - y(1) \approx y'(1)\,\Delta x = y'(1) \cdot 0{,}001$

$y(1'001) = y(1) + y'(1) \cdot 0{,}001$

$\operatorname{atg} 1'001 = \operatorname{atg} 1 + \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1} \cdot 0{,}001 = 0{,}785398163 + \frac{1}{2} \cdot 0'001 =$

$= 0{,}785898\ldots$

Opomba: $f(x+h) \approx f(x) + h \cdot f'(x)$

## Višji odvodi

Odvod odvedljive funkcije je lahko spet odvedljiva funkcija, ki jo lahko ponovno odvajamo in na ta način dobimo višje odvode, ki jih označimo

$y''$, $y''''$, $y'''''''' = y^{(8)}$

Oziroma tudi $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^8y}{dx^8}$

Opomba: $y^{(0)} = y$

Višji odvodi nekaterih elementarnih funkcij

$y = x^r \quad y' = rx^{r-1} \quad y'' = r(r-1)x^{r-2} \quad y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3}$

Če je $r \in \mathbb{N}$, potem je $y^{(r-1)} = \underbrace{r(r-1)\ldots\ldots}\, x^{r-(r-1)} = r(r-1)\ldots 2x$

$y^{(r)} = r!$

$y^{(r+1)} = 0$

2. $y = e^x \quad y' = e^x \quad y^{(n)} = e^x$

3. $y = \sin x \quad y' = \cos x \quad y'' = -\sin x \quad y''' = -\cos x$

odvodi se ciklično ponavljajo. podobno za cosinus.

4) $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

$y' = u'v + uv'$

$y'' = u''\cdot v + v''u + u'v' + u\cdot v''$

$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$

$y''' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv'''$

$y''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''$

$= u^{(3)}v^{(0)} + 3u^{(2)}v^{(1)} + 3u^{(1)}v^{(2)} + uv^{(3)}$

Dobimo: formulo

$(u\cdot v)^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} u^{(n-i)} v^{(i)}$

Pascalov trikotnik:

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

Lastnosti odvedljivih funkcij

Izrek: Naj bo f odvedljiva funkcija na intervalu $[a,b]$

in $x_0 \in (a,b)$. Če je $f'(x_0) > 0$, funkcija v tej točki narašča. Če $f'(x_0) < 0$, pada.

Dokaz: Pišemo $\boxed{\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x0) = \eta}$ (glej v knjigi)

Sledi:

$$f(x_0+h) - f'(x_0)h + \eta h + f(x_0)$$
$$f(x_0+h) = f(x_0) + h\underbrace{(f'(x_0) + \eta)}_{>0}$$

Naj bo $f'(x_0) > 0$
$f(x_0+h) > f(x_0)$

Izreki: Primer $f(x) = \log x$
$f'(x) = 1/x \quad > 0$ za $x > 0$
$\log x$ je strogo naraščajoča

ekstremi funkcij

Def: Funkcija $f$ ima v točki $x_0$ lokalni maksimum, če je $f(x) \leq f(x_0)$ za vsak $x$, ki je element neke okolice $x_0$ in $x \neq x_0$
$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Podobno definiramo lokalni minimum $f(x) > f(x_0)$ za $x \neq x_0$ in $x \in$ neke okolice $x_0$

Izrek: Fermat. $x^n + y^n = z^n$
Če ima odvedljiva funkcija $f$ v točki $x_0$ lokalni ekstrem (min ali max) potem je $f'(x_0) = 0$. Pri tem je $x_0$ notranja točka

Fermat

intervala.

Dokaz: Naj bo v točki $x_0$ lokalni maksimum.

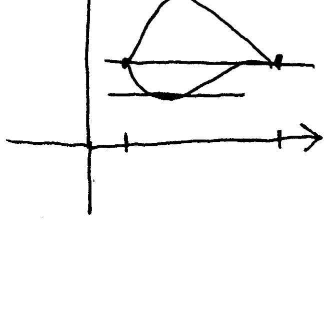
Potem je $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} < 0$ za $h>0$

in $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} > 0$ za $h<0$

Sledi, da je desna limita dif. kocienta, torej desni odvod v $x_0$ manjši ali enak 0.
Podobno je levi odvod v $x_0$ večji ali enak 0.
Ker je f odvedljiva, je levi = desni, torej 0.

Opomba. Če je odvod enak 0, je smerni koeficient tangente enak 0, torej je tangenta vzporedna z osjo x.

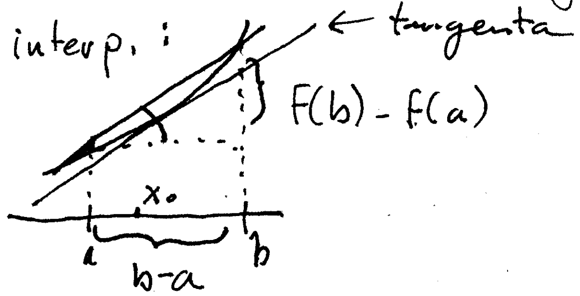
Izrek: $\boxed{\text{Rolle}}$ Naj bo f odvedljiva na zaprtem intervalu $[a,b]$ in naj bo $f(a)=f(b)$. Potem obstaja vsaj ena točka $x_0$ znotraj intervala, tako, da je $f'(t)=0$



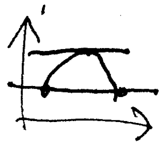
Dokaz: Odvedljiva fja $f$ je tudi zvezna, torej na zaprtem intervalu $[a,b]$ doseže min $m$ in max $M$. Če je $m=M$ je $f$ konstantna in je $f'(x_0)=0$ za $\forall x \in [a,b]$.
Če je $m<M$, potem $f$ doseže minimum ali maksimum v notranji točki intervala $[a,b]$. V tej točki je po Fermatu $f'(x_0)=0$

Izrek: $\boxed{\text{Lagrangeov izrek}}$. Naj bo $f$ odvedljiva funkcija na $[a,b]$, Potem obstaja neka točka $x_0 \in [a,b]$, tako da je
$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad (=tg)$$

Geom. interp.:




Lagrangeov izrek nam pove, da obstaja neka točka $x_0$ znotraj tega intervala, tako da je tangenta skozi točko $(x_0, f(x_0))$ vzporedna s sekanto skozi sekanto $(a, f(a)), (b, f(b))$.
Rollov je poseben primer Lagrangeovega



Dokaz: Definiramo novo funkcijo $g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$
Ker je $f$ odvedljiva, je tudi $g$ odvedljiva in velja

$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(\underbrace{a-a}_{0}) = f(a)$

$g(b) = \cancel{f(b)} - \frac{\cancel{f(b)}-f(a)}{\cancel{b-a}}(\cancel{b-a}) = f(a)$

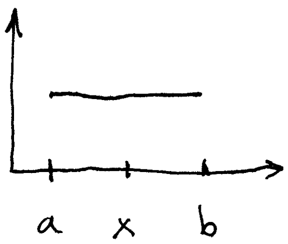
Z funkcijo $g$ velja, da je odvedljiva na $[a,b]$ in $g(a)=g(b)$. $\rightarrow$ Torej za funkcijo $g$ lahko uporabimo Rollov izrek, ki pravi, da obstaja $x_0 \in [a,b]$, da je $g'(x_0)=0$

$\rightarrow$ Torej $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1 \Rightarrow g'(x_0) = 0 = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Izrek: Funkcija $f$, ki je na $[a,b]$ odvedljiva in za katero velja $f'(x_0)=0$ za vsak $x_0 \in (a,b)$ je konstantna.

Dokaz:




Naj bo $x \in [a,b]$. Uporabimo Lagrangeov izrek za interval $[a,x]$. Potem obstaja $x_0 \in (a,x)$, tako da je $f'(x_0) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$f(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{0}(x-a) + f(a) \Rightarrow f(x) = f(a)$. Torej je $f$ konstantna.

Izrek: Naj bosta $f$ in $g$ odvedljivi na $[a,b]$ in naj velja $f'(x) = g'(x)$ za vsak $x \in (a,b)$

Potem je $f(x) - g(x) = C$ za $\forall x$.

Funkciji se razlikujeta samo za konstanto.

Dokaz: Definiramo novo fjo $h(x) = f(x) - g(x)$, potem $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, torej $h(x) = C \Rightarrow f(x) - g(x)$

Ekstremi funkcij

- po Fermatu je pogoj $f'(x)=0$ potreben pogoj za nastop ekstrema. Ni pa zadosten pogoj

- Primer: $f(x)=x^3$ $f'(x)=3x^2$ V točki $f'(0)=0$ ni ekstrema.

Def.: Točke, za katere velja $f'(x)=0$ imenujemo stacionarne točke.

Opomba: Stacionarne točke so kandidati za ekstrem funkcije.

Izrek: Če prvi odvod pri prehodu skozi stacionarno točko spremeni predznak, potem je v tej točki ekstrem. Če predznaka ne spremeni, ekstrema ni.

Dokaz: Denimo, da $f'(x)$ ne spremeni predznaka. Recimo, da je $f'(x)<0$ za $x<x_0$ in $f'(x)<0$ za $x>x_0$. Potem fja levo in desno od točke pada, torej ni ekstrema. Podobno če $f'(x)>0$ za $x<x_0$ in $f'(x)>0$ za $x>x_0$

Denimo, da $f'(x)$ pri prehodu spremeni predznak, npr. $f'(x)>0$ za $x<x_0$ in $f'(x)<0$ za $x>x_0$. Po enem (Fermat) izmed izrekov funkcija levo od $x_0$ narašča in desno pada, torej je v $x_0$ maksimum. Podobno za minimum.

*

| $f'(x)$ | $x_0$ | $f'(x)$ |
|---|---|---|
| $-$ | min | $+$ |
| $+$ | max | $-$ |
| $-/+$ | ni | $-/+$ |

Izrek: Naj bo $f$ dvakrat odvedljiva. Če je drugi odvod v $x_0$ pozitiven, je v tej točki minimum. Če je negativen, je maksimum. Če je $=0$, ~~...~~ potem ne vemo, kaj se dogaja v stacionarni točki.

Dokaz: Drugi odvod v stacionarni točki je pozitiven.

Torej $f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = L > 0$.

Ker je $x_0$ stacionarna točka, je $f'(x_0) = 0$. Torej

$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} = L > 0$.

Naj bo $x > x_0$:

$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$, torej tudi $f'(x) > 0$ za $x > x_0$

$(x - x_0) > 0$

Podobno $x < x_0$

$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$, torej $f'(x) < 0$ za $x < x_0$

$(x - x_0) < 0$

Odvod spremeni predznak, po prejšnjem izreku je to ekstrem. V tem primeru po * dobimo minimum. Podobno za maksimum.

Primer: $f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$ $\quad f''(x) = 6x$ $\quad f'''(x) = 0$

2. Odvod $= 0$, ampak ni ekstrema.

- $g'(x) = 4x^3$ $\quad g''(x) = 12x^2$ $\quad g''(0) = 0$. $\quad g(x) = x^4$

V $x_0$ je ekstrem.

Torej $g''(x_0) = 0$ in $f''(x) = 0$ in ne vemo, kaj se dogaja

Primer: $f(x) = (x^2+x+2)(x^2+x-2)$

$f'(x) = (2x+1)(x^2+x-2+x^2+x+2)$
$= (2x+1)(2x^2+2x) = 2(x^2+x)(2x+1) = 2x(x+1)(2x+1)$
$2(2x+1)x(x+1) = 0$

$x_1 = -1/2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = -1$

Torej v $x_3$ min, $x_2$ min $x_1$ max

Lahko določimo ekstreme tudi s pomočjo drugih odvodov $f''(x) = 2(6x^2+6x+1)$

$f''(-1) = 2 > 0$ min
$f''(-1/2) = -1 < 0$ max
$f''(0) = 2 > 0$ min

Metoda najmanjših kvadratov.
n-krat popravimo neko meritev in dobimo za rezultat $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

~~Kotiko~~ Iščemo število, ki je najbližje vsem meritvam.
Iščemo tako število, da je vsota razlike kvadratov najmanjša.

$(x-a_1) + (x-a_2) + \ldots + (x-a_n)$

$(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_n)^2 = f(x)$

Iščemo tak $x$, da vrednost funkcije čim manj, torej ekstrem funkcije, torej iščemo stacionarno točko funkcije, da

$f'(x_0) = 0.$

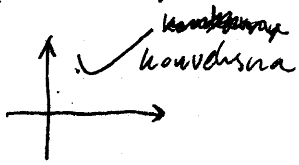
$f'(x) = 2(x-a_1) + 2(x-a_2) + \ldots + 2(x-a_n) = 0 \quad / :2$

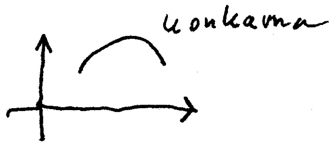
$f'(x) = x-a_1 + x-a_2 + \ldots x-a_n = 0$
$nx = a_1+a_2+a_3+\ldots$
$x = \dfrac{a_1+a_2+a_3+a_n}{n}$

Def: Če je drugi odvod funkcije $f$ pozitiven, potem pravimo, da je $f$ konveksna, če pa je drugi odvod negativen, je funkcija konkavna. !

Točko, kjer se stika konveksni in konkavni del funkcije imenujemo prevoj.

$f''(x) > 0 \Rightarrow f'(x)$ narašča $f$




Primer: $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f''(x) = 6x \rightarrow$ za $x>0$ konveksna, za $x<0$ konkavna,
$f''(x) = 0$ torej se v $x_0$ stakneta $\rightarrow$ prevoj
V prevoju je $f''(x) = 0$

## Odpravljanje nedoločenosti

Naj bo $f$ oblike $f(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$, pri čemer $V(a) = 0$ za nek $a$ in prav tako $u(a) = 0$.

Potem ta točka ni definirana. Lahko pa v tej točki obstaja limita izraza $u(x)/v(x)$.

Računanje te limite imenujemo odpravljanje nedoločenosti.

Primer:

$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$

$x = 1$: $\frac{0}{0}$

Izračunajmo limito $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} =$

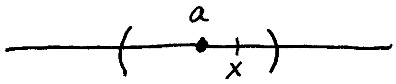
$= \boxed{\frac{3}{2}}$

Pri odpravljanju nedoločenosti si pomagamo z <u>L'Hospitalovim pravilom</u>.

Izrek: Naj bosta funkciji $u$ in $v$ odvedljivi v neki okolici $a$ in naj velja $u(a) = 0$ in $v(a) = 0$.
Naj bo $v(x) \neq 0$, $v'(x) \neq 0$ za $x \neq a$ in $x$ v okolici $a$.
Če obstaja limita

$\lim\limits_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$, potem obstaja tudi $\lim\limits_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)}$ in

velja $\lim\limits_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$

Dokaz: 

Naj bo $x$ iz okolice točke $a$. Označimo $\frac{u(x)}{v(x)} = k$.
Definiramo novo funkcijo $g(t) = u(t) - k\cdot v(t)$, za $t \in [a, x]$
Velja $g(a) = 0$, $g(x) = u(x) - k(v(x)) = 0$

Po Rollovem izreku obstaja neka točka $\xi \in [a, x]$, tako da je $g'(\xi) = 0 \Rightarrow u'(\xi) - kv'(\xi)$ $\} \rightarrow u'(\xi)/v'(\xi) = k$

Ko gre $x \to a$, gre tudi $a < \xi < x$, $\xi \to a$, torej v limiti dobimo $\lim\limits_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}$

Primer: $\frac{x^3-1}{x^2-1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$

Opomba: L'Hospitalovo pravilo uporabljamo pri nedoločenih izrazih, npr.

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{2x} \neq \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

Primer: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}\cdot a}{1} = a$$

Verzijo L'Hospitalovega pravila lahko izpeljemo tudi za primer izrazov oblike $\infty/\infty$

**Izrek:** Naj bosta $u$ in $v$ odvedljivi funkciji v okolici $a$ in naj bo

$$\lim_{x\to a} u(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a} v(x) = \pm\infty.$$

Če obstaja končna ali neskončna limita izraza $\frac{u'(x)}{v'(x)}$, obstaja tudi $\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)}$ in velja $\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a}\frac{u'(x)}{v'(x)}$.

**Dokaz:** opustimo.

**Primeri:**

- $$\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{-2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{-2} = 0.$$

- $$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{3\cos^2 x}{\cos^2(3x)} = \lim_{x\to\pi/2}$$

$$\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cos x\cdot(-\sin x)}{\cancel{2}\cos(3x)\cdot(-\sin(3x))\cdot\cancel{3}} = \frac{(-\sin x)(\sin x) - \cancel{\cos x\cos x}}{(-\sin 3x)\cdot 3\cdot(-\sin 3x) - \cancel{\cos(3x)(\cos 3x)\cdot 3}}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{3\sin 3x} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

ali:
$$3\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\cos x}{\cos(3x)}\right)^2 = 3\left(\lim_{x\to\pi/2}\frac{-\sin x}{-\sin 3x\cdot 3}\right)^2 = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Oglejmo si še primer izraza $u(x)\cdot v(x)$, kjer je $\lim\limits_{x\to a} u(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} v(x)=\infty$, izraz oblike $0\cdot\infty$.

V tem primeru pišemo $\lim\limits_{x\to a} u(x)\,v(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{u(x)}{\frac{1}{v(x)}}$.
Uporabimo L'Hospitalovo pravilo.

Primer: $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\cdot x^n=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n\cdot(x^{n-1})}{e^x}=$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1\cdot x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n!\to\text{konst}}{e^x\to\text{narašča}}=0$

Torej $e^x$ narašča hitreje kot katerakoli potenca.

# Integral

## 1. nedoločeni integral

Naj bo $F$ odvedljiva funkcija, torej lahko izračunamo njen odvod $F'(x)=f(x)$

Vprašajmo se obratno. Naj bo dana funkcija $f$. Zanima nas, katero funkcijo moramo odvajati, da dobimo $F$. Iskano funkcijo imenujemo nedoločeni integral funkcije $f$ in pišemo $\int f(x)\,dx$,

To pomeni, če je $F(x)=\int f(x)\,dx$, potem je $F'(x)=f(x)$.

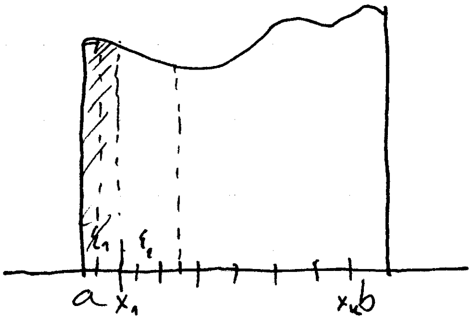
Naj bo dana funkcija f, ki je odvod neke funkcije. Vemo (glej izrek na strani m), da se funkciji, ki imata isti odvod razlikujeta kvečjemu za konstanto.

Torej je nedoločeni integral funkcije f do konstante enolično določen.

Primer: $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$ (konstanta)

- **<u>določeni integral</u>**

Definirajmo določeni integral funkcije $f(x) \geq 0$ na intervalu $[a, b]$




Interval $[a,b]$ razdelimo na podintervale $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1 \dots n$. Na vsakem podintervalu si izberemo poljubno točko, ki jo označim $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Izračunamo $f(\xi_k)$. Definiramo <u>integralsko vsoto.</u>

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}),$$ To je vsota ploščin pravokotnikov z osnovnico $[x_{k-1}, x_k]$ in višino $f(\xi_k)$.

Integralska vsota je približek za ploščino pod krivuljo. Pogledamo si limito integralskih vsot, ko gredo vse razdalje ~~po~~ podintervalov proti 0, torej gre $n\to\infty$. Če obstaja limita teh integralskih vsot, jo imenujemo določeni integral funkcije f na $[a,b]$ in pišemo

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{(x_k - x_{k-1})\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})}$$

Pokažimo, da je ta limita enaka ploščini pod krivuljo zvezne funkcije f.
Naj bo torej f zvezna funkcija.

Definirajmo še dve vsoti:
- zgornje vsote $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(M_k)(x_k - x_{k-1})$, pri čemer je $M_k$ tista točka na $[x_{k-1}, x_k]$, v kateri fja doseže maksimum na $[x_{k-1}, x_k]$ (tak $M_k$ obstaja po enem izmed prejšnjih izrekov).
  Zgornja vsota je vedno večja ali kvečjemu enaka od ploščine pod krivuljo.
- podobno definiramo spodnje vsote $s_n = \sum_{k=1}^{n} f(m_k)(x_k - x_{k-1})$, $m_k \in [x_{k-1}, x_k]$, tako da $f(m_k)$ minimum na $[x_{k-1}, x_k]$.
  $s_n$ je vedno manjša ali kvečjemu enaka ploščini pod

krivuljo.

Opazimo še, da je $s_n \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{n} f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})}_{\text{integralska vsota}} \leq S_n$

Če je funkcija zvezna, potem za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, čim je $|x-y| < \delta$.
To velja, ker zvezna funkcija na zaprtem intervalu enakomerno zvezna.
Pri izbranem $\varepsilon$ lahko torej naredimo takšno delitev intervala $[a,b]$, da je dolžina vsakega podintervala $< \delta$. Potem pa ~~se~~ na vsakem podintervalu velja, da je $M_k - m_k < \varepsilon$.

Sledi
$$
\begin{aligned}
S_n - s_n &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon (x_i - x_{i-1}) = \\
&= \varepsilon(\cancel{x_1} - x_0 + x_2 - \cancel{x_1} + \ldots x_n - x_{n-1}) = \\
&= \varepsilon(x_n - x_0) = \varepsilon(b-a)
\end{aligned}
$$

Ko $\delta \to 0$, dobimo $S_n - s_n \to 0$, torej so v limiti vse tri vsote $S_n$, $s_n$ in $\sum_{n=1}^{n} f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})$ za zvezno funkcijo določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ obstaja in je enak ploščini pod krivuljo.

Opomba: Če funkcija f ni pozitivna, razdelimo interval na podintervale tako, da je funkcija na vsakem podintervalu bodisi pozitivna, bodisi negativna. Če je funkcija negativna, je

$\int_a^b f(x)dx$ enak negativni vrednosti ploščine med krivuljo in x osjo.

Izrek: Odsekoma zvezna funkcija je integrabilna (obstaja določeni integral te funkcije)

Dokaz: Odsekoma zvezna funkcija ima končno ali števno neskončno skokov, interval razdelimo na podintervale tako, da so skoki na robu podintervalov.

Lastnosti določenega integrala

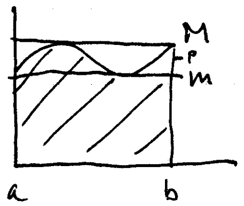
1. Integracijsko spremenljivko lahko poljubno označimo
$\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b f(t)dt$ . . . .

2. Če zamenjamo meji, se spremeni predznak.
$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^a f(x)dx = 0$ Dokaz: $\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx \rightarrow 2\underbrace{\int_a^a f(x)dx}_{0} = 0$

4. Naj bo $c \in [a,b]$, potem je $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

5. Naj bo $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Potem obstaja število $P$, da je $m \leq P < M$
in $\int_a^b f(x)dx = P(b-a)$ oziroma $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$.
Izrek o povprečni vrednosti.



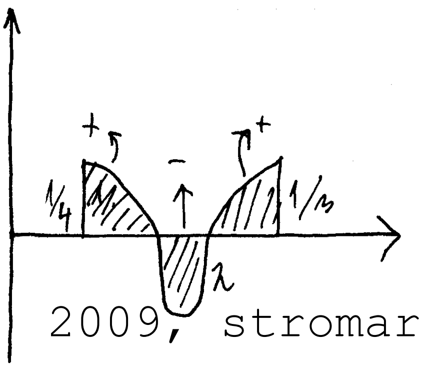

Če je $f$ zvezna, obstaja $x_0 \in [a,b]$, tako, da je

$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)$ obstaja nek $x_0$, da $f(x_0) = P$, ker $m \leq P < M$

6. Integral $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.
Res.
konvergira — trikotniška neenakost — konvergira

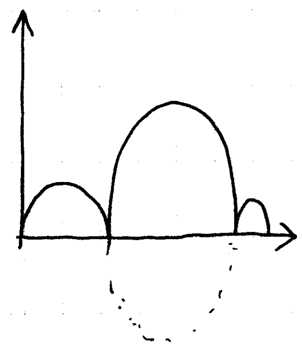
$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\geq 0}| = \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)|(x_i - x_{i-1})$$

int. vsota za $|f|$.




$|1/4 - 2 + 1/3| = \left|-\frac{17}{12}\right| = \frac{17}{12}$

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

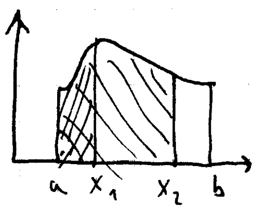


$1/4 + 2 + 1/3 = \frac{29}{12}$

## Zveza med določenim in nedoločenim integralom

Naj bo funkcija zvezna na intervalu $[a,b]$. Potem definiramo novo funkcijo ~~...~~)

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ za vsak $x$ iz $[a,b]$




Vrednost $F(x)$ je enaka ploščini pod krivuljo funkcije $f(x)$ od $a$ do $x$

Izrek: $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ je zvezna. Dokaz:

Oglejmo si $F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt =$

$= \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^h f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} = \int_x^h f(t)\,dt$

$= f(x_0)(x_0 + h - x) = \overbrace{F(x_0)}^{\text{omejeno}} \cdot h \overset{h \to 0}{=} 0$, torej $F(x)$ zvezna

↑ izrek o povp. vrednosti ↖ $x_0 \in [x, x+h]$

Izrek: Funkcija $F(x)$ je odvedljiva, torej je določeni integral odvedljiva funkcija zgornje meje in velja

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Dokaz: Pri dokazu smo dobili $F(x+h)-F(x) = f(x_0)\cdot h$

$x_0 \in [x, x+h]$.

Torej je $F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)\cancel{h}}{\cancel{h}} =$

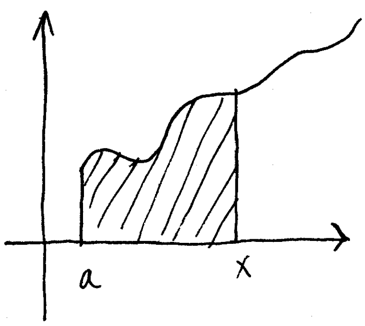
$= \lim_{h\to 0} f(x_0) = f(x)$

$x_0 \to x$ (ko $k \to 0$) torej $f(x_0) \to f(x)$, ker $f$ zvezna

$x_0 \in [x, x+h]$

Osnovni izrek integralskega računa

- geom. interp.




$F'(x)$ meri spremembo funkcije $F(x)$. Odvod $F'(x)$ pove, koliko se $F(x)$ spremeni

Ugotovili smo, da je za dano funkcijo $f(x)$ njen nedoločeni integral $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Naj bo sedaj $F(x)$ poljubni nedoločeni integral funkcije $f(x)$

$f(x) = \cos x$

$\int \cos x\,dx = \int_a^x \cos t\,dt$ Potem je $F(x) = G(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C$

Sledi: $F(a) = \int_a^a f(t)dt + C$

$C = F(a)$

$F(b) = \int_a^b f(t)dt + C = \int_a^b f(t)dt + F(a)$

Sledi: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ !

Dokazali smo naslednji izrek:
Naj bo f integrabilna funkcija in F poljuben nedoločeni integral te funkcije. Potem velja:

$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$ Newton-Leibnitzova formula

Pravila za integriranje
Integriranje je nasprotna operacija od odvajanja

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ (n \neq -1)$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \log x + C$

$\int \cos x \, dx = \sin x + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}\, x + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}\, x + C$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{atg}\, x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{a}\sin x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + C$

Pravila (iz pravil za odvajanje

1. $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int (f(x) \pm g(x))dx$

2. $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$

3. Naj bo ~~funkcija~~ $x = x(t)$ odvedljiva funkcija spremenljivke $t$. Potem je

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\,x'(t)\,dt.$$

To pravilo pove, kako uvedemo novo spremenljivko v integral. <u>Primer</u>:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a\,dt}{\sqrt{a^2-(at)^2}} = \int \frac{a\,dt}{\sqrt{a^2(1-t^2)}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \operatorname{asin} t + c = \operatorname{asin}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{asin} x + C$$

$\Rightarrow x = a \cdot t$

$dx = a\,dt \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow$

4. Novo spremenljivko lahko uvedemo tudi v določeni integral. Naj bo $x=x(t)$ monotona funkcija spremenljivke.

Naj bo $x(\alpha)=a$ in $x(\beta)=b$. Spremenijo se meje. Potem je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)\,dt$$

Primer: $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx =$

$x = a\cdot \sin t \qquad x=0 \to t=0 \qquad$ na $[0, \pi/2]$

$dx = a\cdot \cos t\, dt \qquad x=a \to t=\frac{\pi}{2}$

$$= \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\cdot\sin^2 t}\cdot a\cos t\, dt$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int_0^{\pi/2} dt + \int_0^{\pi/2} \cos 2t\, dt\right) = \frac{a^2}{2}\, t\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + 0 - 0\right) = \boxed{\frac{\pi a^2}{4}}$$

5. Integracija per partes

Uporabili bomo lastnost, ki velja za odvod produkta dveh funkcij:

$(u\cdot v)' = u'v + uv'$ oz $d(uv) = du\cdot v + u\,dv$.

$$\int \to \; u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

Če je namesto integrala $\int u(x)v'(x)dx = \int u\,dv$ laže izračunati integral $\int u'(x)v(x)\,dx = \int v\,du$, potem to storimo po metodi per partes.

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

Primer: $\int x^2 \log x \, dx =$

$u = \log x \qquad dv = x^2\,dx \to v = \frac{x^3}{3}$

$\downarrow du = \frac{1}{x}\,dx$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2 \log x\,dx = \log x \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{1}{x}\,dx =$$
$$= \log x \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$

Primer: $\int x \cos x \, dx$

$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$

$\hookrightarrow du = dx \qquad \hookrightarrow v = \sin x$

$$x \cdot \sin x - \int \sin x\,dx = x \cdot \sin x + \cos x + C$$

! Primer: $\int e^x \cos 2x \overset{I}{=}$

$u = \cos 2x \qquad dv = e^x$

$du = -\sin 2x \cdot 2 \qquad v = e^x$

$$\cos 2x \cdot e^x - \underbrace{\int e^x\, 2 \cdot (-\sin 2x)\,dx}$$

$$\int e^x \sin 2x\,dx = e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos^2 x\; x$$

$u = \sin 2x \qquad du = 2\cos 2x$

$dv = e^x\,dx \qquad v = e^x$

vstavimo

$$e^x\cos(2x) + 2(e^x\sin 2x) - 4\underbrace{\int e^x\cos 2x\,dx}_{I}$$

sledi: $5\int e^x\cos(2x)dx = e^x\cos^2 x + 2e^x\sin(2x)$

$$\int e^x\cos(2x)\,dx = 1/5(e^x\cos 2x + 2\ \ e^x\sin 2x) + C$$

Metodo per partes običajno uporabljamo pri integralih oblike $\int x^n\cos ax\,dx$, $\int x^n\sin ax\,dx$, $\int e^{ax}x^n\,dx$, $\int e^{ab}\cos bx\,dx$, $\int x^n\log x\,dx$, ....

Opomba: Pri integraciji določenega integrala po metodi per partes moramo vstaviti še meje

$$\boxed{\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du}\ !$$

Metode za računanje nedoločenih integralov.

1. racionalna funkcija

Integral lahko vedno izračunamo, nedoločeni.

Računamo $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, $P(x), Q(x)$ polinoma. Izračunamo tako:

① Če je stopnja polinoma $P(x)$ večja od stopnje $Q(x)$, potem $P(x)$ delimo s $Q(x)$ in dobimo

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \underbrace{\int A(x)dx}_{\text{znamo}} + \int\frac{R(x)}{Q(x)}dx \qquad P(x):Q(x) = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad st R(x) < Q(x)$$

② Polinom $Q(x)$ razcepimo in dobimo $Q(x) = C(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2}$
$(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}$

③ Izraz $\frac{R(x)}{Q(x)}$ razcepimo na parcialne ulomke

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{a_1 x^{n_1-1} + \dots}{(x-x_1)^{n_1}} + \frac{b_1 x^{n_2-1}}{(x-x_2)^{n_2}} + \dots + \frac{c_1 x^{m_1-1}}{(x^2+p_1+q_1)^{m_1}} + \dots$$

↑ stopnja za eno manjša

④ Izračunamo integrale

i) $$\int \frac{a_1 x^{n_1-1} + a_2 x^{n_1-2} + \dots + a_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}}\,dx$$

Uvedemo novo spremenljivko $t = x - x_1$ $\quad dt = dx$

$$\int \frac{a_1 (t+x_1)^{n_1-1} \dots}{t^{n_1}}\,dt$$

Primer:

1) $$\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x-1)^3}\,dx \qquad x-1 = t \rightarrow x = t+1, \quad dx = dt$$

$$\int \frac{2(t+1)^2 - (t+1) + 1}{t^3}\,dt = \int \frac{2t^2 + 4t + 2 - t - 1 + 1}{t^3}\,dt =$$

$$\int \frac{2}{t} + \frac{3}{t^2} + \frac{2}{t^3}\,dt = 2\ln t + 3\frac{t^{-1}}{-1} + 2\frac{t^{-2}}{-2} + C =$$

$$= 2\log(x-1) - 3\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C$$

2) $$\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,dx = \qquad \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$= \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{b}{2})^2 \underbrace{- \frac{b^2}{4} + C}_{k^2}}\,dx = \qquad x + b/2 = t, \quad dx = dt$$

$$= \int \frac{M\cdot(t - b/2) + N}{t^2 + k^2} = \frac{1}{k^2}\int \frac{M(t-b/2) + N}{(\frac{t}{k})^2 + 1}\,dt = \qquad s = t/k \quad ds = dt/k$$

$$= \frac{1}{k^2}\int \frac{M(ks - b/2) + N}{s^2+1}\cdot k \cdot ds$$

$$= \frac{1}{k}\int \frac{Mks}{s^2+1}\,ds + \frac{1}{k}\underbrace{\int \frac{\cancel{aM\frac{b}{2}} - M\frac{b}{2} + MN}{s^2+1}\,ds}_{\operatorname{atg} s} \qquad \int \frac{du}{u} = \log u = \log(s^2+1)$$

$u = s^2+1$, $du = 2s\,ds$

Primer: $\int \frac{2x^3}{x^2+2x+2}\,dx$

$$x^3 : x^2+2x+2 = \boxed{x-2+\frac{2x+4}{x^2+2x+2}}$$

$$\frac{x^3+2x^2+2x}{\qquad}$$

$$-2x^2-2x$$

$$\underline{-2x^2-4x-4}$$

$$2x-4$$

$$2\int(x-2)\,dx+2\int\frac{2x+4}{x^2+2x+2} = 2\left(\frac{x^2}{2}-2x\right) + 4\int\frac{x+2}{x^2+2x+2}$$

$$4\int\frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx = 4\int\frac{x+2}{(x+1)^2-1+2}\,dx = \int\frac{x+2}{(x+1)^2+1} =$$

$$= 4\int\frac{t-1+2}{t^2+1} = 4\cdot\int\frac{t+1}{t^2+1}\,dt \qquad t = x+1$$

$$4\int\frac{t}{t^2+1}\,dt + 4\int\frac{dt}{t^2+1} = 4\int\frac{ds}{2s} + 4\,\mathrm{atg}\,t = 4\tfrac{1}{2}\log s + 4\,\mathrm{atg}\,t + C$$

$t^2+1 = s$

$2t\,dt = ds \to t\,dt = \frac{ds}{2}$

Dobimo: $\int\frac{2x^3}{x^2+2x+2}\,dx = x^2-4x+2\log s + 4\,\mathrm{atg}\,t + c =$

$$= x^2-4x+2\log(x^2+2x+2)+4\,\mathrm{atg}\,(x+1)+C$$

Primer: $\int\frac{x+1}{x^2-x-6}\,dx$

$$x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$$

$$\frac{x+1}{x^2-x-6} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A-3B}{x^2-x-6} =$$

$\Rightarrow 1 = A+B \;(x) \to B = 1-A$

$1 = 2A-3B \to 1 = 2A-3+3A \to 4 = 2A+3A \Rightarrow \underline{A = 4/5}$

$\underline{B = 1/5}$

$$\int \frac{4/5}{x-3}\,dx + \int \frac{1/5}{x+2}\,dx = \tfrac{4}{5}\log|x-3| + \tfrac{1}{5}\log|x+2| + C$$

Opomba: Rezultat integrala racionalne funkcije je vsota polinoma, logaritma in atg. Zato bi lahko reševali integral racionalne funkcije tudi z nastavkom.

2. integracija nekaterih iracionalnih funkcij

- $\int \sqrt[n]{(ax+b)^m}\,dx$ uvedemo novo spremenljivko $t = ax+b$ $dt = a\,dx$ in dobimo

$$\int \sqrt[n]{t^m}\,\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\int t^{m/n}\,dt = \frac{1}{a}\,\frac{t^{m/n+1}}{m/n+1} + C$$

če je $\frac{m}{n} = -1$ dobimo log.

- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} =$ ker poznamo $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \log\left(\sqrt{x^2+c}\right) + k$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{(x+p/2)^2 - p^2/4 + q}} \underset{\substack{t = x+\frac{p}{2} \\ dt = dx}}{=} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+c}} = \log\left(t + \sqrt{t^2+c}\right) + k = \log\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}}\right)$$

- $\int \frac{dx}{\sqrt{q+px-x^2}} =$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{q - (x-p/2)^2 + p^2/4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{q + p^2/4 - (x-p/2)^2}} \underset{\substack{t = x - p/2 \\ dt = dx}}{=} \int \frac{dt}{\sqrt{c^2 - t^2}} = \frac{1}{c}\int \frac{dt}{\sqrt{1-(t/c)^2}}$$

$s = t/c$ $ds = dt/c$ $\frac{1}{c}\int \frac{c\,ds}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin s \leftarrow$ vstavimo nazaj

Primer: $\int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-1)^2 + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x-1)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{5-t^2}} =$

$x^2-2x+1 \qquad t = x-1 \quad dt = dx$

$= \int \frac{dt}{\sqrt{5(1-t^2/5)}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-(\frac{t}{\sqrt{5}})^2}} =$

$s = t/\sqrt{5} \quad ds = dt/\sqrt{5}$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{5}\, ds}{\sqrt{1-s^2}} = \arcsin s + C = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{5}} + C$

## 3. Integracija trigonometričnih funkcij

1. Naj bo $R(\cos x, \sin x)$ racionalna funkcija $\sin x$ in $\cos x$, to pomeni, da je kvocient dveh polinomov v $\sin x$ in $\cos x$.

npr.: $\frac{\sin^2 x \cos x - \cos x + 3}{\sin x + 3 \sin^2 x \cos x}$

Integral take funkcije znamo vedno izračunati s pomočjo <u>substitucije $t = tg(x/2)$</u>.

Izrazimo vse člene, ki nastopajo s pomočjo $t$.

$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \frac{\sin x/2 \cos x/2}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2)} \Big/ \frac{\frac{1}{\cos^2 x/2}}{\frac{1}{\cos^2 x/2}} = 2 \frac{tg\, x/2}{tg^2 x/2 + 1} = \boxed{2 \frac{t}{1+t^2}}$

$\cos x = \cos^2 x/2 - \sin^2 x/2 = \frac{\cos^2 x/2 - \sin^2 x/2}{\sin^2 x/2 + \cos^2 x/2} \Big/ \frac{\frac{1}{\cos^2 x/2}}{\frac{1}{\cos^2 x/2}} = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{tg^2(x/2) + 1} = \boxed{\frac{1-t^2}{1+t^2}}$

$t = tg \frac{x}{2} \to \frac{x}{2} = atg\, t \to x = 2\, atg\, t \Rightarrow dx = \boxed{2 \cdot \frac{1}{1+t^2} dt}$

Ko vse te tri izraze vstavimo v integral

$\int R(\cos x, \sin x)\,dx$ dobimo integral racionalne funkcije glede na spremenljivko $t$. Tega znamo izračunati.

Primer: $\displaystyle\int \frac{dx}{3+\cos x} = \int \frac{2\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt}{3+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2\,dt}{3(1+t^2)+1-t^2} = \int \frac{2\,dt}{2t^2+4} = \int \frac{dt}{t^2+2} =$

$\displaystyle = \int \frac{1}{2\left(\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)}\,dt = \int \frac{\sqrt{2}\,ds}{2(s^2+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{atg}\,s + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \mathrm{atg}\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}/\sqrt{2}\right)+C$

$s$

$\mathrm{tg}\,x/2 \to t/\sqrt{2} = \mathrm{tg}\,x/2/\sqrt{2}$

Primer: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2\cdot\frac{1}{1+t^2}\,dt}{2\cdot\frac{t}{1+t^2}} = \int \frac{1}{t}\,dt = \log t + c = \log\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)+C$

Opomba: Integrali nekaterih racionalnih funkcij sinusov in cosinusov se dajo hitreje rešiti s pomočjo kakšne druge substitucije. Ta pa vedno funkcionira.

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x\cos x+\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\,(\sin x/\cos x + 1)} = \int \frac{dt}{t+1} =$

$t = \mathrm{tg}\,x \to dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx$

$= \log(t+1)+C = \log(\mathrm{tg}\,x+1)+C$

Oglejmo si integrale oblike ① $\int \sin^n x\,dx$, ② $\int \cos^n x\,dx$, ③ $\int \sin^n x\cos^m x\,dx$

① Če je $n$ liho število, potem uvedemo $\sin^n x = \sin^{2k+1} x = \underbrace{\sin^{2k} x}\cdot \sin x = (\sin^2 x)^k\cdot\sin x = (1-\cos^2 x)^k \sin x$. Uvedemo novo spremenljivko $t=\cos x \to dt = -\sin x\,dx$. Sledi

$\int \sin^n x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^k \sin x\,dx = \int (1-t^2)^k\,dt$ integral polinoma znamo.

Primer: $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \int (1-t^2)\,dt =$

$= -t + \frac{t^3}{3} + c = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$

Če je n sodo število zmanjšamo potenco z obrazcem.

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}}$$

To pomeni, da se potenca razpolovi.

Npr: $\sin^6 x = (\sin^2 x)^3 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3$ Potem po nekaj korakih pridemo do samih lihih potenc, kar znamo.

② $\int \cos^n x\, dx$. Če je n liha potenca, potem na podoben način, kot prej uvedemo novo spremenljivko

$t = \sin x \rightarrow dt = \cos x\, dx$. $(\cos^2 x)^k = (1-\sin^2 x)^k$

Če je n soda potenca podobno kot prej s pomočjo formule

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}$$

pridemo v nekaj korakih do samih lihih potenc

③ $\int \sin^n x \cos^m x$, če je n ali m liha potenca, potem integral preprosto izračunamo:

a) n lih $\int \sin^n x \cos^m x\, dx = \int (\sin^2 x)^k \cos^m x \sin x dx =$

$$\int (1-\cos^2 x)^k \cos^m x \overbrace{\sin x\, dx}^{dt} = \qquad \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = \sin x\, dx \end{array}$$

$$= \int (1-t^2)^k t^m dt$$

b) m lih podobno

$$\int (\sin^n x) \cos^m x\, dx = \int \sin^n x (1-\sin^2 x)^k \cos x\, dx =$$

$\sin x = t \quad \cos x\, dx = dt$

$$= \int t^n (1-t^2)^k dt$$

c) Če sta n in m sodi števili, potem uporabimo obrazca $\sin^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{2}$ in $\cos^2 x = \frac{1+\cos^2 x}{2}$ in razpolovimo potenci. V nekaj korakih pridemo do vsaj ene lihe potence, nato uvedemo substitucijo.

Primer: $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \int (1-\cos^2 x)\cdot \cos^2 x \, dx = \int \cos^2 x \, dx - \int \cos^4 x \, dx =$

$= \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx - \int \cos^4 x \, dx$

- $\int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$

- $\int \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx =$

$= \frac{1}{4}\left(x + 2\frac{\sin 2x}{2} + \int \cos^2 2x \, dx\right)$

- $\int \cos^2 2x \, dx = \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right) = \frac{1}{2}x + \sin 4x/8$

$\to = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}x + \sin 4x/32$

$\Rightarrow 1/2\, x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C$

$= \boxed{\frac{7x}{8} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 4x}{32} + C}$

Integral oblike

$\int \sin(ax)\cos(bx)dx$, $\int \sin(ax)\sin(bx)dx$, $\int \cos(ax)\cos(bx)dx$

rešimo tako, da uporabimo naslednje zveze

- $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(ax+bx) + \sin(ax-bx)\right)$

- $\sin(ax)\sin(bx) = \frac{1}{2}\left(\cos(ax-bx) - \cos(ax+bx)\right)$
- $\cos(ax)\cos(bx) = \frac{1}{2} = \left(\cos(ax-bx) + \cos(ax+bx)\right)$

Primer: $\int \sin(3x)\cos(2x)\,dx = \int \frac{1}{2}(\sin 5x + \sin x)\,dx =$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\,\frac{\cos 5x}{5} - \frac{1}{2}\cos x + C}$$

## 4. Integrali transcendentnih funkcij.

Pri funkcijah, v katerih nastopa $x$ samo v izrazu $e^x$ uvedemo novo spremenljivko $t = e^x$ .
$dt = e^x\,dx$

Primer: $\int \frac{1}{1+e^x} = \int \frac{1}{1+t}\,\frac{dt}{t} = \int \frac{1}{t(1+t)}\,dt =$

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(1+t)} = \frac{A + At + Bt}{t(1+t)}$$

$0 = A + B$
$1 = A \rightarrow B = -1$

$$= \int\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt = \log t - \log(1+t) = \log e^x - \log(1+e^x) =$$
$$= \boxed{x - \log(1+e^x) + C}$$

Če v izrazu, ki ga integriramo nastopa ex in x ali log x in x, poskusimo z metodo per partes . . . če deluje.

## Nepravi ali posplošeni integral

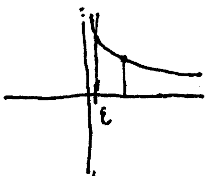
Pri računanju določenega integrala je bila funkcija, ki smo jo integrirali omejena, ~~integral~~ interval, po katerem smo integrirali pa prav tako.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Obstajata dve vrsti posplošenega integrala

1. denimo, da naša funkcija ni omejena na intervalu $[a,b]$ in v krajišni točki sploh ni definirana.
   Npr:

   $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ni definirana v $T(0)$



Denimo $f$ ni definirana v točki $a$, obstaja pa integral $\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ za vsak $\varepsilon > 0$

če obstaja $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ pravimo, da posplošeni integral obstaja in pišemo

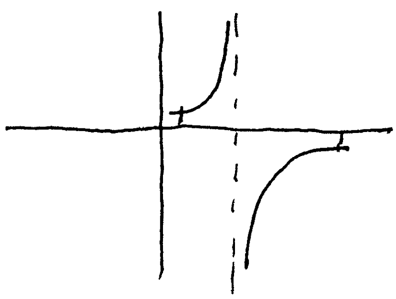
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Primer: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^{1/2}}{1/2} = \lim_{\varepsilon \to 0} 2(1-\varepsilon) = 2$

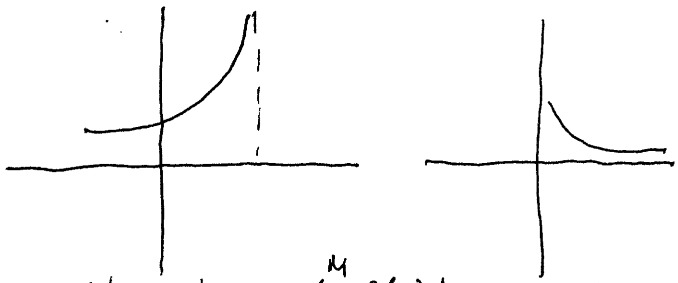
Podobno definiramo posplošeni integral, če $f$ ni omejena v drugem krajišču intervala ali v vmesni točki.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \quad , \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

Obe limiti morata obstajati neodvisno od druge.



104



Integracijsko območje je neomejeno.
Če obstaja $\int_a^m f(x)dx$ za $\forall m > a$ in obstaja tudi limita $\lim_{M\to\infty}\int_a^M f(x)dx$, potem posplošeni integral obstaja in pišemo $\lim_{M\to\infty}\int_a^n f(x)dx = \lim_{M\to\infty}\int_a^\infty f(x)dx$. Podobno definiramo $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ in $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$)

Primer: $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{M\to\infty}\frac{x^{1/2}}{1/2}\Big|_1^M = \lim_{M\to\infty} 2(\sqrt{M}-1) \to \infty$

posplošeni integral v tem primeru ne obstaja

Včasih nas zanima samo obstoj posplošenega integrala in ne konkretna rešitev. Pomagamo si z ocenami.

Npr: $\int_1^\infty \cos^2 x / x^2 \, dx \overset{(\cos^2 x < 1)}{\leq} \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^\infty =$

$= -\frac{1}{x}\Big|_1^\infty \to 0 = 0\left(-\frac{1}{1}\right) = 1$ posplošeni integral obstaja

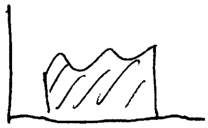
Uporaba integralov v geometriji

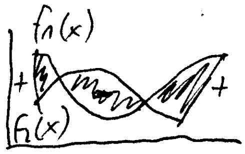
- ploščine krivočrtnih likov

Po def. je določeni $\int_a^b f(x)dx$, $f(x)\geq 0$ ploščina pod krivuljo. Če je $f(x)\leq 0$ na nekem intervalu $[c,d]$ je $\int_c^d f(x)dx$ enak $-$ploščina pod krivuljo.

Ploščina lika med krivuljama, določenima z $f_1(x)$ in $f_2(x)$ je $\int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx$

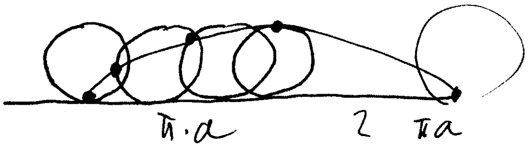
105




Primer: Ploščina pod cikloido

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$




$$\int_0^{2\pi a} y(x)\,dx$$

uvedemo novo spremenljivko $t$ in je potem

$$y = a(1 - \cos t)$$
$$x = a(t - \sin t)$$

$$dx = \dot{x}\,dt$$

$$\dot{x} = a - a\cos t$$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)(a - a\cos t)\,dt} =$$

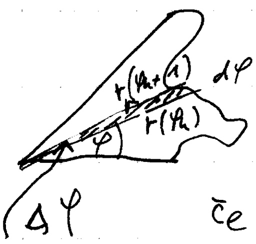
$$= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)(1-\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2\,dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt =$$

$$= a^2\left(t - 2\sin t + \int \cos^2 t\right)\Big|_0^{2\pi} = a^2\left(t - 2\sin t + \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt\right) =$$

$$= a^2\left(t\Big|_0^{2\pi} - 2\sin t\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}t\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) = a^2(2\pi + \pi) = \underline{3\pi a^2}$$

# Ploščina izseka



$r = r(\varphi)$

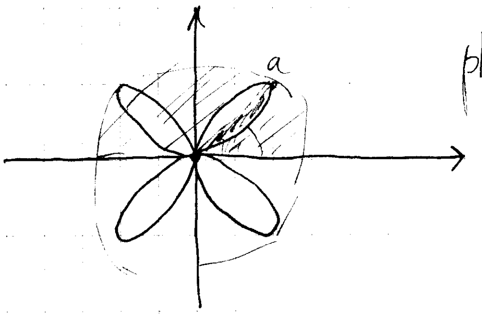
$\Delta\varphi$ če je $\Delta\varphi = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ dovolj majhen, potem je $r(\varphi_k) \approx r(\varphi_{k+1})$ in zato privzamemo, da je ploščina osenčenega dela približno enaka krožnemu izseku.

$\boxed{\frac{r^2 \Delta\varphi}{2}}$ Celotna ploščina je potem $\sum_{k=1}^{n} \frac{r^2(\varphi_k)}{2}(\varphi_k - \varphi_{k-1})$.

Dobili smo integralsko vsoto za $\varphi$ in v limiti dobimo, da je ploščina enaka

$$\boxed{\int_{\varphi_0}^{\varphi_k} \frac{r^2 \varphi}{2} \, d\varphi}$$

Primer: $r = a|\sin 2\varphi|$




$$pl = 8 \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{r^2}{2} d\varphi = 8 \int_0^{\pi/4} a^2 \frac{\sin^2 2\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi = 2a^2 \left(\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= 2a^2(\pi/4 - 0) = \boxed{\pi a^2/2}$$

Kaj če krivulja ni dana v polarni obliki $r = r(\varphi)$?

$x = r\cos\varphi \qquad x' = -r\sin\varphi \qquad xy' - yx' = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi =$

$y = r\sin\varphi \qquad y' = r\cos\varphi \qquad = r^2$

Sledi $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(xy'-yx') = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_n}(x\dot{y}-y\dot{x})\,dt$

Izraz $\frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$ je diferencial ploščine.

Primer: Ploščina elipse, dane v parametrični obliki:

$x = a\cos t$

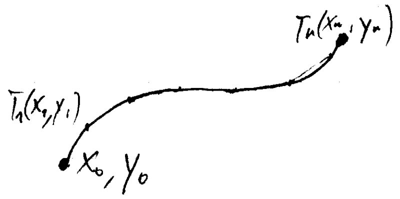
$y = b\sin t$

$$pl = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos t\cdot b\cos t + b\sin t\, a\sin t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = 1/2\, ab\,t\Big|_0^{2\pi} = \underline{ab\pi}$$

## Ločna dolžina

Zanima nas dolžina krivulje v ravnini




Izračunajmo najprej dolžino lomljene črte, ki je približek dolžine naše krivulje

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} \overset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} =$$

$=f(x)$

Lagrangeov izrek $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Sledi $b = x_k$ $a = x_{k-1}$

$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \left(f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\right)^2} = \boxed{\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1})}$$

Dobili smo integralsko vsoto za funkcijo za funkcijo

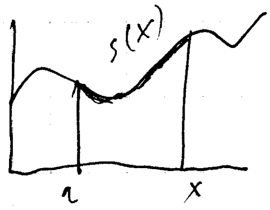
$\lim\sum g(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \int g(x)\,dx$ $\qquad\sqrt{1+f'(x)^2}$.

Naredimo limito integralskih vsot, ko vse $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ proti 0, dobimo, da je dolžina

$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ oziroma $s = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$

Dobili smo formulo za eksplicitno podano krivuljo $y=f(x)$. Izpeljimo še formulo za dolžino krivulje za parametrično podano krivuljo.

Pišemo $s(x) = \int_a^x \sqrt{1+(y')^2}\,dx$




Po osnovnem izreku analize je
$s'(x) = \sqrt{1+(y')^2}$ $\quad s'(x) = ds/dx$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ ločni diferencial.

Sledi $\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ in zato

$$\boxed{s = \int_{t_0}^{t_n} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt}$$

Še izpeljava formule za dolžino krivulje podane v polarni obliki

$x = r\cos\varphi \qquad x' = -r\sin\varphi + r'\cos\varphi \qquad (x')^2 = r^2\sin^2\varphi - 2rr'\sin\varphi\cos\varphi + (r')^2\cos^2\varphi$

$y = r\sin\varphi \qquad y' = +r\cos\varphi + r'\cos\varphi \qquad (y')^2 = r^2\cos^2\varphi + 2rr'\cos\varphi\sin\varphi + (r')^2\sin\varphi$

$$(x')^2+(y')^2 = r^2+(r')^2$$

Sledi: $\boxed{s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(r')^2}\, d\varphi}$

Primer: Dolžina krivulje $y = \mathrm{ch}\,x$ med $[1, \cosh 1), (3, \cosh 3)$

$$s = \int_1^3 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_1^3 \sqrt{1+\frac{e^{2x}-\cancel{2}+e^{-2x}}{4}}\,dx =$$

$$y = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad y' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad = \int_1^3 \sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx =$$

$$= \int_1^3 \sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx = \int_1^3 \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx = \frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\Big|_1^3 =$$

$$= \underline{\underline{1/2\,(e^3-e^{-3}-e^1+e^{-1})}}$$

Primer: $\left.\begin{array}{l} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{array}\right\}$ cikloida

dolžina loka

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{(a(1-\cos t))^2+(a(\cancel{1-}\sin t))^2}\,dt =$$

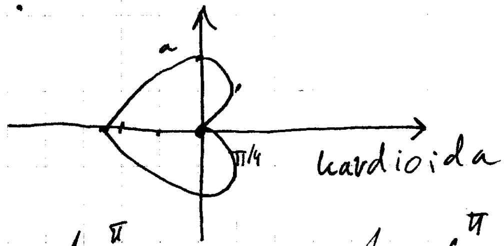
$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\underbrace{(1-\cos t)}}\,dt =$$

$$\frac{1-\cos 2t}{2} = \sin^2 t$$

$$= a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\cdot 2\cdot \sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\left(\sin\frac{t}{2}\right)dt =$$

$$= 2a\,\frac{(-\cos t/2)}{1/2}\Big|_0^{2\pi} = 4a\,(1+1) = 8a$$

Primer: $r = a(1-\cos\varphi)$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$




$$s = \frac{1}{2} 2\int_0^{\pi} \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\, d\varphi = \frac{1}{2}2 \int_0^{\pi} \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a(\sin\varphi)^2}\, d\varphi =$$

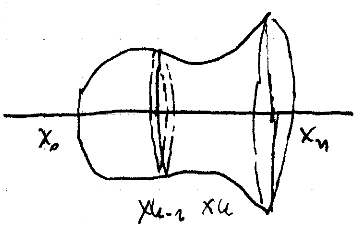
$$\frac{1}{2}2a \int_0^{\pi} \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2}2a \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2\cdot 2a\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a \frac{-\cos\varphi/2}{1/2}\Big|_0^{\pi} = 8a(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0) = \boxed{8a}$$

$\underline{8a}$

# Površina in prostornina rotacijskega telesa

Naj bo $y = f(x)$ pozitivna funkcija na $[a, b]$. Krivuljo določeno s to funkcijo zarotiramo okoli osi $x$ in dobimo rotacijsko telo.




Oglejmo si prostornino majhnega dela na intervalu $x_{k-1}$ do $x_k$

$$\underbrace{\pi \cdot f(\xi_k)^2}_{\text{ploščina osnovne ploskve}} (x_k - x_{k-1})$$

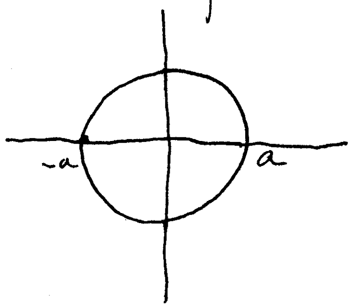
višina do

Ko vse te delčke seštejemo, dobimo integralsko vsoto

$\sum_{k=1}^{n} \pi f(\xi_k)^2 (x_k - x_{k-1})$ in v limiti, ko gredo vsi $(x_k - x_{k-1}) \to 0$ dobimo, da je prostornina

$\boxed{V = \pi \int f(x)^2 dx}$ oziroma $\boxed{V = \pi \int_a^b y^2 dx}$

Izračunajmo prostornino krogle s polmerom a.




$x^2 + y^2 = a^2$

$y^2 = a^2 - x^2$

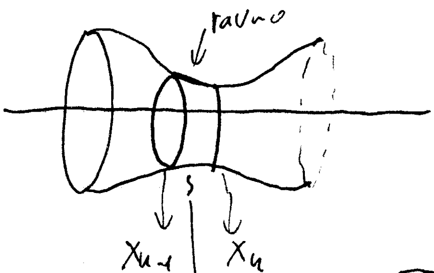
$$V = \pi \cdot \int_{-a}^{a} y^2 dx = \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-a}^{a} = \pi\left(a^3 - \frac{a^3}{3} - \left(a^3 - \frac{-a^3}{3}\right)\right)$$

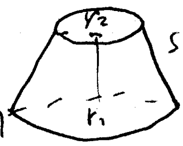
$$= \pi\left(\frac{2}{3}a^3 - \left(-\frac{2}{3}a^3\right)\right) = \boxed{\pi \cdot \frac{4a^3}{3}}$$

## Površina rotacijskega telesa

Naj bo kot prej $y = f(x)$ pozitivna na $[a,b]$, ki jo zarotiramo okrog osi $x$. Zanima nas površina rotacijskega telesa




Površina majhnega delčka je enaka površini prisekanega stožca




plašč $= (r_1 + r_2) \cdot s \cdot \pi$

$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$

$\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1})$ kot pri ločni dolžini, Lagrange

Torej $\pi s_k \left(f(x_{k-1}) + f(x_k)\right)$

$$= \pi\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1})\big(f(x_k)+f(x_{k-1})\big)$$

Seštejemo vse te delčke in dobimo integralsko vsoto $\sum_{k=1}^{n} \pi\big(f(x_k)+f(x_{k-1})\big)\sqrt{1+f'(\xi_k)^2}\,(x_k - x_{k-1})$

in v limiti, ko $x_k - x_{k-1} \to 0$ dobimo

$$\text{površina} = \pi\int_a^b 2f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \boxed{2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

Primer: Površina krogle s polmerom $a$

$$y^2 = a^2 - x^2 \rightarrow y = \sqrt{a^2-x^2}$$

$$\cancel{\pi\int_a^b 2(a^2-x^2)\sqrt{1+(a^2+x^2)^2}\,dx =}$$

$$\cancel{= 2\pi\int_a^b \sqrt{(a^2-x^2)^2+(a^2+x^2)^4}\,dx}$$

površina $\quad y' = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{-\cancel{2}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$$2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx = 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\pi\, a x\Big|_{-a}^{a} =$$

$$= 2\pi a(a-(-a)) = \boxed{4\pi a^2}$$

Opomba: Če je podano parametrično, je enačba

$$\text{pov} = \boxed{2\pi\int_\alpha^\beta y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt}$$

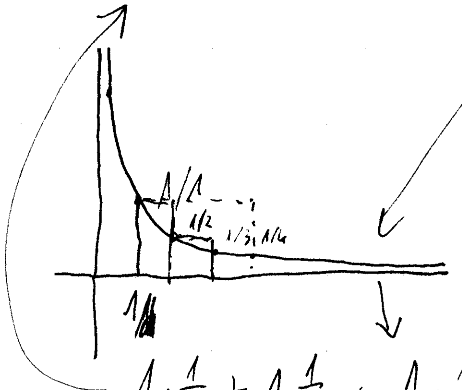
## Integralski kriterij za določanje konvergence vrst

Izrek: Naj bo $f$ padajoča zvezna nenegativna funkcija na intervalu $[1, \infty]$. Potem

$\int_1^\infty f(x)dx$ in vrsta $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ hkrati

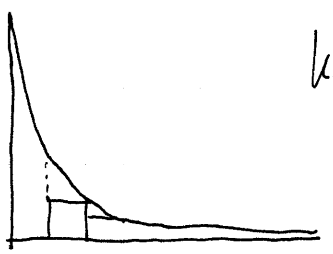
konvergirata ali hkrati divergirata. To pomeni: za konvergenco vrste zadošča preveriti konvergenco integrala.

Dokaz: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ $\quad$ $\int_1^\infty 1/x \, dx$




$1 \cdot \frac{1}{1} + 1 \frac{1}{2} + 1 \cdot 1/3$ $\quad$ ker je $\int$ neskončen, je tudi $\sum$ neskončna

Obratno



ker je funkcija padajoča, je $\boxed{f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq f(n+1)}$

Seštejemo vse člene in dobimo

- $\sum_{1}^{\infty} f(n) \geq \int_{1}^{\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ Primer: $\sum^{\infty} 1/n$

$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \log x \Big|_{1}^{\infty} = \infty$ Ta posplošeni integral divergira, torej divergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$

VELIKO SREČE NA IZPITIH!

www.stromar.si