Zaporedja

Uvod

Definicija: zaporedje $(a_n) = a_1, a_2, \ldots. a_n, \ldots$ je predpis, ki vsakemu naravnemu številu n (indeks zaporedja) priredi neko realno število a_n (n-ti člen zaporedja). Zaporedje je torej preslikava množice naravnih števil v realna števila. $f: N \to R, n \square\ a_n$. Zaporedje lahko podamo na več načinov. Najbolj preprosto preslikavo zapišemo eksplicitno $a_n = f(n)$.

Množica členov zaporedja $\{a_n, n \in N\} \subset R$ imenujemo zaloga vrednosti zaporedja. Navzgor omejeno zaporedje a_n ima zaradi lasnosti kontinuuma realnih števil natančno zgornjo mejo M=***sup***a_n, navzdol omejeno zaporedje b_n pa ima natančno spodnjo mejo m=***inf***b_n. Natančna zgornja meja in natančna spodnja meja sta lahko člena zaporedja ali pa tudi ne.

Natančno zgornjo mejo zaporedja lahko opišemo tudi drugače. M=***sup***a_n velja natanko takrat, kadar so vsi čkeni manjši ali enaki M in za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da je $a_{n0} > M - \varepsilon$. V vsaki epsilon okolici mora biti vsaj en člen zaporedja. Če M ne sodi med člene zaporedja, lahko sklepamo, da mora biti v vsaki njegovi epsilon okolici celo neskončno mnogo členov. To pripelje do pojma stekališče.

Definicija: število a je stekališče zaporedja a_n, kadar je v vsaki epsilon okolici $(a - \varepsilon, a + \varepsilon =)$ neskončno mnogo členov zaporedja.

Trditev: natančna zgornja meja je največji člen ali pa je steklišče zaporedja. Podobno je tudi spodnja meja, najmanjši člen ali pa stekališče zaporedja.

Kadar je a stekališče, je torej neenačba $|a - an| < \varepsilon$ izpolnjena za neskončno mnogo členov zaporedja. Lahko pa je neskončno mnogo členov, ki tej enačbi ne zadoščajo in so izven epsilon okolice.

Izrek: vsako navzgor in navzdol omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.

Konvergentna zaporedja

Definicija: Zaporedje an konvergira proti številu a, natanko takrat kadar za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks n_0, da so v epsilon okolici števila a vsi členi a_n, z indeksom $n \geq n_0$. Zaporedje ki konvergira je konvergentno zaporedje, število a je njegova limita, kar zapišemo a=lima_n ali $a_n \to a; n \to \infty$. Zaporedje ki ne konvergira je divergentno. Pri konvergentnem zaporedju z limito a je neenačba $|a - an| < \varepsilon$ izpolnjena za vse indekse n od nekega n_0 dalje.

Očitno je limita konvergentega zaporeedja stekališče in to edino stekališče tega zaporedja. Ni pa vsako stekališče limita zaporedja, namreč če ima zaporedje več kot eno stekališče, ne more biti konvergentno, v tem primeru nobeno od stekališč ni limita.

Lasnost konvergentnih zaporedij

Izrek: vsako konvergento zaporedje je omejeno, konvergentnost zaporedja je zadosten pogoj za omejenost. Omejenost zaporedja pa je potreben pogoj za konvergenco. Zaporedje, ki ni omejeno, ne more biti konvergetno. Prav tako zaporedje, ki ima več kot eno stekališče ne more biti konvergetno.

Izrek: zaporedje je konvergentno natanko takrat, ko je omejeno in ima samo eno stekališče.

Izrek: zaporedje (a_n) je konvergentno natanko takrat, kadar zadošča tako imenovanemu Cauchyjevem pogoju. Vsakemu pozitivnemu številu ε pripada tak indeks n_0, da je neenačba $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ izpolnjena za vsak $n > n_0$ in za vsako naravno število p.

Divergentna zaporedja

Zaporedje ki ni konvergentno je divergentno. Na primer, vsako neomejeno zaporedje je divergentno. Tudi vsako zaporedje z več kot enim stekališčem je divergentno. Če so členi čedalje večji in rastejo proti neskončnosti, pravaimo da zaporedje divergira proti neskončnosti.

Definicija: če za vsako pozitivno število M obstaja tak indkes n_0, da je $a_n > M$, če je $n \geq n_0$, pravimo da zaporedje a_n divergira proti neskončnosti in napišemo $\lim a_n = \infty$. Podobno zaporedje divergira proti $-\infty$: $\lim a_n = -\infty$ če za vsako pozitivno število A obstaja tak indeks n_0, da je $a_n < -A$, če je $n > n_0$.

Lasnosti limite zaporedja

Konvergentnost je lasnost, ki je odvisna le od zelo poznih členov zaporedja, začetni členi pa nanjo ne vplivajo. Očitno ostane konvergetno zaporedje konvergetno z isto limito, če mu dodamo ali odvzamemo končno mnogo členov.

Trditev: če imata zaporedji (a_n) in (b_n) isto limito $\lim a_n = \lim b_n = l$ in je zaporedje (c_n) med njima, tako da je $a_n \leq c_n \leq b_n$ za vsak n je tudi $\lim c_n = l$

Trditev: če sta zaporedji (a_n) in (b_n) konvergetni in velja $\lim a_n = a$ in $\lim b_n = b$, potem so konvergetna tudi zaporedja

$(a_n + b_n) = a_1 + b_1, a_2 + b_2 \ldots,$

$(a_n - b_n) = a_1 - b_1, a_2 - b_2 \ldots$

$(a_n \times b_n) = a_1 \times b_1, a_2 \times b_2 \ldots$

in velja

$\lim(a_n \times b_n) = \lim a_n \times \lim b_n,$

$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n,$

$\lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n.$

Trditev: če je $a_n \neq 0$ za vsak n in če zaporedje (a_n) konvergira proti $a \neq 0$, konvergira tudi zaporedje $(1/a_n)$ in je $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

Trditev: če zaporedje a_n konvergira proti limiti a in zaporedje b_n, kjer so $b_n \neq 0$ za vsak n, konvergira proti $b \neq 0$, konvergira zaporedje kvocientov (a_n/b_n) proti a/b,

Splošneje: če je a_n kvocient dveh polinomov in $\alpha_0, \beta_0 \neq 0$, potem je

$$\lim a_n = \lim \frac{\alpha_0 n^k + \ldots + \alpha_{k-1} n + \alpha_k}{\beta_0 n^l + \ldots + \beta_{l-1} n + \beta_l} = \begin{cases} 0; k < l \\ \alpha_0 / \beta_0; k = l \\ \pm\infty; k > l \end{cases}$$

Monotona zaporedja

Definicija: zaporedje (a_n) je naraščujoče, če za vsak $n \in N$ velja $a_n \leq a_{n+1}$, če za vsak n velja $a_n < a_{n+1}$, je zaporedje strogo naraščujoče. Zaporedje (a_n) je padajoče , če za vsako naravno število n velja $a_n \geq a_{n+1}$. Če za vsak n velja $a_n > a_{n+1}$, je zapredje strogo naraščujoče. Zaporedje je monotono, če je naraščajujoče ali padajoče.

Monotona zaporedja so vsaj z ene strani omejena, vsako naraščajujoče zapoedje a_n je navzdol omejeno in ***inf***a_n=a_1, vsako padajoče zaporedje b_n pa je navzgor omejeno in ***sup***b_n=b_1.

Izrek: naraščajoče zaporedje, ki je navzgor omejeno, konvergira proti ***lim***a_n=***sup***a_n. Naraščujoče zaporedje, ki ni navzgor omejeno pa divergira proti ∞.

Podobno tudi padajaoče zaporedje, ki je navzdol omejeno, konvergira proti ***lim***a_n=***inf***a_n. Padajoče zaporedje, ki ni navzdol omejeno pa divergira proti minus neskončnosti.

Potence z realnimi eksponenti

Trditev: zaporedje (c_n) je konvergento, če je $c \in (-1,1]$. Natančneje $\lim c^n = \begin{cases} \infty; c > 1 \\ 1; c = 1 \\ 0; |c| < 1 \end{cases}$, če je $c \leq -1$, zaporedje ni konvergetno.

Zaporedje korenov

Vzemimo pozitivno realno število $c>0$ in si oglejmo zaporedje korenov ($c^{1/n}$) = $\sqrt[n]{c}$.

Trditev: za vsak $c>0$ je zaporedje ($c^{1/n}$) konvergetno z limito $\lim c^{1/n}$ =1.

Izrek: za vsako realno število x obstaja zaporedje racionalnih števil (x_n), ki konvergira k x: $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = x$.

Definicija: naj bo $c>0$. potem je $c^r = c^{\lim r_n} = \lim c^{r_n}$

Konstrukcija števila e

Vzemimo zapoedji $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ in $b_n = (1+\frac{1}{n})^{-n}$. Pokazali bomo, da sta obe zaporedji konvergetni in imata isto limito. V dokazu bomo potrebovali naslednjo neenakost.

Lema: za vsak $x \in (0,1)$ in za vsak $m \in Z$, |m|>1 velja: $(1-x)^m > 1-mx$

Dokaz leme: za eksponetne $m \in N$, $m \geq 2$ si lahko pomagamo z indukcijo.

1. če je m = 2 je očitno $(1-x)^2 = 1-2x+x^2 > 1-2x$.
2. iz indukcijske pretpostavke $(1-x)^m > 1-mx$ sledi

$(1-x)^{m+1}=(1-x)^2(1-x)>(1-mx)(1-x)=1-(m+1)x+mx^2>1-(m+1)x$
in lema je za $m\geq 2$ dokazana.
Če je $m=-n\leq -2; n\in N$, pa iz neenačbe $(1+x)(1-x)=1-x^2<1$ sledi $1+x<\frac{1}{1-x}(1-x)^{-1}$, torej je $1-x)^m=(1-x)^{-n}>(1+x)^n>1+nx=1-mx$
In neenačba je dokazana tudi v tem primeru.

Trditev: zaporedje $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $n\geq 1$ je naraščujoče in zaporedje $b_n=(1+\frac{1}{n})^{-n}$, $n\geq 2$ je padajoče.

Trditev: zaporedje a_n je navzgor omejeno in zaporedje b_n je navzdol omejeno.

Trditev: zaporedji a_n in b_n imata isto limito, ki jo bomo označili z ***e***. Število ***e*** je iracionalno število, ki ga bomo še pogosto srečali. Zaokroženo na dvanajst decimalk je 2.718281828459.

Logaritmi

Ko smo iskali obrat relacije $A=a^n$ pri fiksnem eksponentu, smo prišli do definicije korena: $a=\sqrt[n]{A}$. Če pa na to relacijo gledamo pri spremenljivem eksponetu in spremenljivi osnovi, je njen obrat logaritem.

Definicija: logaritem števila *A>0* pri osnovi *a>0* in *a* različen od *0*, je število s katerim moramo potencirati osnovo *a*, da dobimo *A*. $x=\log_a A\Leftrightarrow a^x=A$. Število *A* imenujemo logaritmand, število *a* pa osnovo.

$0=\log_a 1$ in $1=\log_a a$. Iz zakonov računanja izpeljemo naslednja pravila za računanje z logaritmi

$$\boxed{\begin{aligned}&\log_a(AB)=\log_a A+\log_a B\\&\log_a A/B=\log_a A-\log_a B\\&\log_a Ar=r\log_a A\end{aligned}}$$

če pa sta *a* in *b* različni osnovi $\log_a A=\log_a b\times\log_b A=\log_b A/\log_b a$.

Številske vrste

Konvergenca vrst

Definicija: če je dano zaporedje (a_n), je s predpisom $S_1=a_1; S_n=S_{n-1}+a_n=a_1+a_2+....+a_n$, določeno zaporedje delnih vsot vrste s členi a_n, ki jo označimo $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=a_1+a_2+...+a_k+...$. Če zaporedje delnih vsot S_n konvergira proti številu *s*, pravimo, da je slednja vrsta konvergetna in da je njena vsota enaka *s*, kar zapišemo $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=s$. če je zaporedje delnih vsot divergetno, je vrsta divergentna in nima vsote.

Izrek: vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je konvergetna natanko takrat, kadar za vsak $\varepsilon>0$ obstaja tak indeks n_o, da je $|S_{n+p}-S_n|=|a_n+1+...+a_{n+p}|<\varepsilon$ za vsak $p\in N$, če je le $n>n_0$.

Drugače povedano: če je vrsta konvergetna, lahko izračunamo njeno vrsto poljubno konvergetno, če le seštejemo dovolj njenih začetnih členov. Vsotao preostalih neskončno mnogo členov bo manjša od predpisane napake.

Izrek: (potreben pogoj za konvergenco). Če je vrsta konvergetna, konvergira zaporedjenjenih členov proti 0.

Vrste s pozitivnimi členi

Če so vsi členi $a_n>0$ je zaporedje delnih vsot $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ naraščujoče in konvergetno natanko takrat, kadar je navzgor omejeno. Če ni omejeno, pa divergira proti neskončno.

Izrek: (primerjalni kriterij) če sta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti s pozitivnimi členi in je $a_n \leq b_n$ za vsak $n \in N$, potem velja. Če je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna je potem tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergetna ali drugače povedano če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna je tudi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentna.

Izrek: (kvocientni kriterij) če obstaja $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ (ki je lahko tudi neskončno), velja: vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, če je $L<1$ in divergira, če je $L>1$. če pa je omenjena limita $L=1$, potem kvocientni kriterij na vprašanje o konvergentnosti ne da odgovora.

Absolutna in pogojna konvergenca vrst

Če so členi vrste poljubna števila (pozitivna ali negativna), ločimo dva tipa konvergence.

Definicija: vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutno konvergetna, če je konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ in pogojno konvergetna, če je konvergetna, pa ni absolutno konvergentna.

Izrek: absolutno konvergentna vrsta je konvergetna.

Izrek: Leibnizov kriterij – če je (an) padajoče zaporedje pozitivnih števil in liman = 0, je vrsta $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergetna. Vrstam, kjer se predznaki členov izmenjujejo, (kot je ta v izreku), pravimo alternirajoče vrste.

Trditev: alternirajoča vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$: $\begin{cases} \text{absolutno_konvergetna}: p > 1 \\ \text{pogojno_konvergetna}: 0 < p \leq 1 \\ \text{divergetna}: p \leq 0 \end{cases}$

Vrste so pravzaprav »neskončne vrste«, vendar vseh lasnosti končnih vsot nimajo. Za končne vsote velja komutativnost – vrstni red členov na vsoto ne vpliva, za neskonče vrste pa v splošnem komutativnost ne velja.

Izrek: poljubno absolutni konvergetni vrsti z istimi členi, vendar v drugačnem vrstnem redu, imata enako vsoto.