Šesta vaja iz matematike 1

Andrej Perne

Ljubljana, 2006/07

FUNKCIJE

Funkcija je predpis $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$.
D_f: definicijsko območje funkcije f
$Z_f = \{f(x); x \in \mathcal{D}\}$: zaloga vrednosti funkcije f

Funkcija f je soda, če je $f(-x) = f(x)$.
Funkcija f je liha, če je $f(-x) = -f(x)$.

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{Z}$ je injektivna, če za $x, y \in \mathcal{D}$, $x \neq y$ velja, da je $f(x) \neq f(y)$. (ekvivalentno: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$)
Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{Z}$ je surjektivna, če za vsak $y \in \mathcal{Z}$ obstaja $x \in \mathcal{D}$, da velja $y = f(x)$. (ekvivalentno: $Z_f = \mathcal{Z}$)
Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathcal{Z}$ je bijektivna, če je injektivna in surjektivna.

Kompozitum funkcij: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Inverz funkcije: $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

Limite funkcij:

a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

b $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

c $\lim_{x\to\infty} P(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$, $P(x)$ polinom

1. Določi definicijsko območje naslednjih funkcij!

   a $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \frac{1}{x}$

Ker ne smemo deliti z 0, mora biti $x \neq 0$. Prav tako vemo, da je korenska funkcija definirana samo za nenegativna števila, torej mora veljati $4 - x^2 \geq 0$. Od tu sledi $x^2 \leq 4$, torej $|x| \leq 2$ oz. $-2 \leq x \leq 2$. Definicijsko območje je torej: $D_f = [-2, 0) \cup (0, 2]$.

b $f(x) = x + \ln \frac{x-1}{x+1}$

Ker ne smemo deliti z 0, mora biti $x \neq -1$. Prav tako vemo, da je logaritemska funkcija definirana samo za pozitivna števila, torej mora veljati $\frac{x-1}{x+1} > 0$. Množimo z $(x+1)^2$ in dobimo kvadratno neenačbo $(x-1)(x+1) > 0$. Od tod sledi $x^2 > 1$, torej $|x| > 1$ oz. $x < -1$ ali $x > 1$. Definicijsko območje je torej: $D_f = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

2. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti naslednjih funkcij!

a $f(x) = 1 - x^2$

Ker je to kvadratna funkcija, torej poseben primer polinomov, je definirana povsod: $D_f = \mathbb{R}$. Ta funkcija ima ničli v točkah $x_1 = -1$ in $x_2 = 1$, največjo vrednost pa v točki $x = 0$, kjer je enaka $f(0) = 1$. Zato je zaloga vrednosti $Z_f = (-\infty, 1]$. Priporočljiva je skica.

b $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$

Ker ne smemo deliti z 0, mora biti $x \neq 0$. Zato je $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Za negativna in pozitivna števila, ki so po absolutnih vrednostih enaka, dobimo enake vrednosti funkcije, zato se lahko brez škode za splošnost omejimo na pozitivna števila. Oglejmo si, kaj se dogaja z vrednostjo funkcije, ko gremo proti 0 in ∞:
$x \to 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \to \infty \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \to 0$,
$x \to \infty \Rightarrow \frac{1}{x^2} \to 0 \Rightarrow f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \to 1$.
Torej je $Z_f = (0, 1)$, ker je funkcija f strogo naraščajoča na $(0, \infty)$.

3. Preveri sodost/lihost naslednjih funkcij!

a $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Izračunamo:

$$f(-x) = \frac{-x}{1 + (-x)^2} = -\frac{x}{1 + x^2} = -f(x).$$

Funkcija je liha.

b $f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$

Izračunamo:

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{(-x)^3} = \frac{-\sin x}{-x^3} = f(x).$$

Funkcija je soda.

c $f(x) = x + \sqrt{x^4 + x^6}$

Izračunamo:

$$f(-x) = -x + \sqrt{(-x)^4 + (-x)^6} = -x + \sqrt{x^4 + x^6}.$$

Funkcija ni ne soda ne liha.

4. Preveri injektivnost, surjektivnost in bijektivnost naslednjih funkcij!

a $f(x) = \mathrm{e}^x$

Definicijsko območje funkcije je $D_f = \mathbb{R}$, zaloga vrednosti funkcije pa $Z_f = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$. Priporočljiva je skica.
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je injektivna, ker je strogo naraščajoča, toda ni surjektivna, ker zaloga vrednosti funkcije ni enaka kodomeni.
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ je še vedno injektivna, poleg tega pa tudi surjektivna, saj smo zmanjšali kodomeno na zalogo vrednosti. Torej je funkcija bijektivna.

b $f(x) = 8x - 2x^2$

Funkcija $f(x) = 8x - 2x^2 = -2x(x - 4)$ je kvadratna funkcija z ničlama v $x_1 = 0$ in $x_2 = 4$. Največjo vrednost zavzame v točki $x = 2$, in sicer $f(x) = 8$. Torej je definicijsko območje $D_f = \mathbb{R}$, zaloga vrednosti $Z_f = (-\infty, 8]$. Priporočljiva je skica.
Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ni injektivna, ker so vse vrednosti na intervalu $(-\infty, 8)$ zavzete v dveh različnih točkah. Prav tako ni surjektivna, saj zaloga vrednosti funkcije ni enaka kodomeni.
Funkcija $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$ je injektivna, saj je na tem intervalu strogo padajoča, ni pa surjektivna iz istega razloga kot prej.
Funkcija $f : [2, \infty) \to (-\infty, 8]$ je injektivna in surjektivna, torej bijektivna.

5. Določi kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$!

a $f(x) = x^2$, $g(x) = \mathrm{e}^x$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\mathrm{e}^x) = (\mathrm{e}^x)^2 = \mathrm{e}^{2x} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = \mathrm{e}^{x^2}\end{aligned}$$

Opazimo, da velja: $f \circ g \neq g \circ f$!

b $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $g(x) = 1 + x^2$

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(1+x^2) = \frac{1}{2+x^2} \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 + \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 \\ &= \frac{2+2x+x^2}{1+2x+x^2}\end{aligned}$$

6. Določi kompozitume $f \circ f$, $g \circ g$, $f \circ g$ in $g \circ f$ za funkciji $f(x) = -1+2x$ in $g(x) = 2 - 3x$!

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(-1+2x) = -1 + 2(-1+2x) = -3 + 4x \\ (g \circ g)(x) &= g(g(x)) = g(2-3x) = 2 - 3(2-3x) = -4 + 9x \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2-3x) = -1 + 2(2-3x) = 3 - 6x \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(-1+2x) = 2 - 3(-1+2x) = 5 - 6x\end{aligned}$$

7. Poišči inverzno funkcijo $f^{-1}(x)$ k funkciji $f(x)$!

a $f(x) = 1 + \mathrm{arctg}(3x)$

Pišemo $y = 1+\mathrm{arctg}(3x)$ in zamenjamo vlogi x in y. Nato izrazimo y.

$$\begin{aligned}x &= 1 + \mathrm{arctg}(3y) \\ \mathrm{arctg}(3y) &= x - 1 \\ 3y &= \mathrm{tg}(x-1) \\ y &= \frac{1}{3}\mathrm{tg}(x-1)\end{aligned}$$

Torej je $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}\mathrm{tg}(x-1)$.

b $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

Pišemo $y = \frac{2x+3}{x-2}$ in zamenjamo vlogi x in y. Nato izrazimo y.

$$\begin{aligned} x &= \frac{2y+3}{y-2} \\ x(y-2) &= 2y+3 \\ (x-2)y &= 2x+3 \\ y &= \frac{2x+3}{x-2} \end{aligned}$$

Torej je $f^{-1}(x) = \frac{2x+3}{x-2}$.

8. Izračunaj naslednje limite!

a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{3\sin y}{y} = 3$$

Napravimo substitucijo $y = 3x$, torej $x = \frac{y}{3}$. Ko gre $x \to 0$, gre tudi $y \to 0$.
Splošneje velja: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = a$.

b

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin ax}{x}}{\frac{\sin bx}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x}}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin bx}{x}} = \frac{a}{b}$$

c

$$\begin{aligned} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2} &= \lim_{y\to 0} \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{y^2} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y^2} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{\cos^2\frac{y}{2}+\sin^2\frac{y}{2}-\cos^2\frac{y}{2}+\sin^2\frac{y}{2}}{y^2} \\ &= \lim_{y\to 0} 2\left(\frac{\sin\frac{y}{2}}{y}\right)^2 \\ &= 2\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{y}{2}}{y}\right)^2 = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Napravimo substitucijo $y = \frac{\pi}{2} - x$, torej $x = \frac{\pi}{2} - y$. Ko gre $x \to \frac{\pi}{2}$, gre $y \to 0$. Upoštevali smo tudi enačbe iz trigonometrije: $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ in $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

d

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2}\\ &= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y+1} = \mathrm{e}^2\end{aligned}$$

Napravimo substitucijo $\frac{1}{y} = \frac{2}{x^2-1}$ oz. $y = \frac{x^2-1}{2}$. Ko gre $x \to \infty$, gre tudi $y \to \infty$. Velja še: $x^2 = 2y+1$.

e

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \lim_{y\to\infty}(-y)\mathrm{e}^{-y} = 0$$

Napravimo substitucijo $x = \mathrm{e}^{-y}$ torej $\ln x = -y$ in $y = -\ln x$. Ko gre $x \to 0$, gre $y \to \infty$.

f

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}\\ &= \lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}\\ &= \lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}\\ &= \lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

g

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1} = \frac{m}{n}\end{aligned}$$