Sedma vaja iz matematike 1

Andrej Perne

Ljubljana, 2006/07

1. Izračunaj naslednje limite!

   a

   $$\lim_{x\to 1} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = 1$$

   b

   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^4}}-\sqrt[5]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}} = 1$$

   Opomba: Ulomek zgoraj in spodaj delimo z najvišjo potenco x-a, to je z x.

2. Določi parameter a tako, da bo dana funkcija zvezna!

   a $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & x < 0, \\ x + a, & x \geq 0. \end{cases}$

   Edina možna točka nezveznosti je v točki $x = 0$. Da bo funkcija zvezna, mora biti tam leva limita enaka desni: $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x)$. Velja:

   $$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow 0} f(x) &= \lim_{x\uparrow 0} \mathrm{e}^x = 1 \\ \lim_{x\downarrow 0} f(x) &= \lim_{x\downarrow 0} (x+a) = a \end{aligned}$$

   Da bo funkcija zvezna, mora biti $a = 1$.

   b $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$

   Edina možna točka nezveznosti je v točki $x = 0$. Da bo funkcija zvezna, mora biti tam limita funkcije enaka vrednosti funkcije v točki $x = 0$: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Velja:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = \lim_{y\to\infty} \frac{\sin y}{y} = 0$$

Napravili smo substitucijo $y = \frac{1}{x}$, torej $x = \frac{1}{y}$. Ko gre $x \to 0$, gre $y \to \infty$. V zadnjem koraku upoštevamo, da je funkcija sin omejena. Ker je $f(0) = a$, bo funkcija zvezna, ko bo $a = 0$.

3. V točkah, kjer funkcija $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \le x < 1, \\ 4 - 2x, & 1 \le x < \frac{5}{2}, \\ 2x - 7, & \frac{5}{2} \le x \le 4 \end{cases}$ ni zvezna, določi levo in desno limito!

Možni točki nezveznosti sta v $x_1 = 1$ in $x_2 = \frac{5}{2}$. V teh dveh točkah izračunamo levo in desno limito.

$$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow 1} f(x) &= \lim_{x\uparrow 1} 2\sqrt{x} = 2 \\ \lim_{x\downarrow 1} f(x) &= \lim_{x\downarrow 1} (4 - 2x) = 2 \end{aligned}$$

Ker sta limiti enaki, je v tej točki funkcija zvezna.

$$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow \frac{5}{2}} f(x) &= \lim_{x\uparrow \frac{5}{2}} (4 - 2x) = -1 \\ \lim_{x\downarrow \frac{5}{2}} f(x) &= \lim_{x\downarrow \frac{5}{2}} (2x - 7) = -2 \end{aligned}$$

Limiti nista enaki, torej funkcija v tej točki ni zvezna.

ODVODI

<u>Pravila za odvajanje:</u>

$$\begin{aligned} (f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x) \\ (C \cdot f(x))' &= C \cdot f'(x) \quad (C = \text{konst.}) \\ (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\ (f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

Tabela elementarnih odvodov:

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(C)' = 0 \quad (C = \text{konst.})$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\mathrm{ctg}x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

L'Hopitalovo pravilo:
Če računamo limito ulomka oblike $\frac{0}{0}$ ali $\frac{\infty}{\infty}$ velja:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Monotonost funkcij:

i Funkcija f je naraščajoča, če je $f' > 0$.

ii Funkcija f je padajoča, če je $f' < 0$.

4. Odvajaj naslednje funkcije!

a $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$

$$f'(x) = \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

b $f(x) = x^2 + \sqrt{x+1}$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

c $f(x) = \frac{x^2-5x-1}{x^3}$

$$f'(x) = \frac{(2x-5)x^3 - (x^2-5x-1)3x^2}{x^6} = \frac{-x^2+10x+3}{x^4}$$

d $f(x) = 3\sin x - 5\cos x$

$$f'(x) = 3\cos x + 5\sin x$$

e $f(x) = x\mathrm{arctg}x$

$$f'(x) = \mathrm{arctg}x + x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + \frac{x}{1+x^2}$$

f $f(x) = \ln^3(x^2)$

$$f'(x) = 3\ln^2(x^2) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{6}{x}\ln^2(x^2)$$

g $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \cdot (-\sin x) = \mathrm{e}^x(\cos x - \sin x)$$

h $f(x) = \ln(\sin x)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \mathrm{ctg}x$$

i $f(x) = \mathrm{arctg}\frac{1+x}{1-x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

j $f(x) = \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\cos x)}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln(\cos x) + \ln(\sin x) \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \sin x}{\ln^2(\cos x)} \\ &= \frac{\mathrm{ctg}x \cdot \ln(\cos x) + \mathrm{tg}x \cdot \ln(\sin x)}{\ln^2(\cos x)} \end{aligned}$$

k $f(x) = \ln(\ln^2(\ln^3(x)))$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\ln^2(\ln^3(x))} \cdot 2\ln(\ln^3(x)) \cdot \frac{1}{\ln^3(x)} \cdot 3\ln^2(x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{6}{x\ln(x)\ln(\ln^3(x))} \end{aligned}$$

l $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

Funkcijo najprej zapišemo v drugačni obliki tako, da upoštevamo: $x = \mathrm{e}^{\ln x}$.

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} = \left(\mathrm{e}^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}(1 - \ln x)$$

5. Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+1}$. Določi $f'(0)$ in $f'(-1)$!

   Najprej izračunamo odvod funkcije:
$$f'(x) = \frac{-1}{(x+2)^2} + \frac{-6x}{(x^2+1)^2}.$$
   Torej:
$$\begin{aligned} f'(0) &= -\frac{1}{4}, \\ f'(-1) &= -1 + \frac{6}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6. Funkciji hiperbolični kosinus (ch) in hiperbolični sinus (sh) sta definirani takole:
$$\mathrm{ch}x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{sh}x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$
   Izračunaj $\mathrm{ch}'x$ in $\mathrm{sh}'x$!

   Odvajamo:
$$\begin{aligned} \mathrm{ch}'x &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{sh}x, \\ \mathrm{sh}'x &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{ch}x. \end{aligned}$$

7. Odvajaj implicitno podane funkcije!

   a $x + y = x^2 + x^3$

   Odvajamo levo in desno stran enačbe in izrazimo y':
$$\begin{aligned} 1 + y' &= 2x + 3x^2 \\ y' &= 2x + 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

   b $\ln(x^2 + y^2) = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$

   Odvajamo levo in desno stran enačbe in izrazimo y':
$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+y^2} \cdot (2x + 2yy') &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} \\ \frac{2x + 2yy'}{x^2+y^2} &= \frac{y'x - y}{x^2+y^2} \\ 2x + 2yy' &= y'x - y \\ y'(x - 2y) &= 2x + y \\ y' &= \frac{2x + y}{x - 2y} \end{aligned}$$

8. Z uporabo L'Hopitalovega pravila izračunaj naslednje limite!

a

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}_{=1}=\frac{1}{2}$$

b

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3}=\frac{2}{3}$$

9. Poišči drugi odvod funkcije!

a $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$

Drugi odvod dobimo tako, da prvi odvod še enkrat odvajamo.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \mathrm{e}^{\sin x}\cos^2 x-\mathrm{e}^{\sin x}\sin x\\
&= \mathrm{e}^{\sin x}(\cos^2 x-\sin x)\\
f''(x) &= \mathrm{e}^{\sin x}\cos x(\cos^2 x-\sin x)+\mathrm{e}^{\sin x}(-2\cos x\sin x-\cos x)\\
&= \mathrm{e}^{\sin x}\cos x(\cos^2 x-3\sin x-1)
\end{aligned}$$

b $f(x)=x(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sin(\ln x)+\cos(\ln x)+x\left(\cos(\ln x)\frac{1}{x}-\sin(\ln x)\frac{1}{x}\right)\\
&= 2\cos(\ln x)\\
f''(x) &= -\frac{2}{x}\sin(\ln x)
\end{aligned}$$

c $x=\ln(1+y)$

Implicitno dvakrat odvajamo.

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{1+y}\cdot y'\\
y' &= 1+y\\
y'' &= y'=1+y
\end{aligned}$$

10. Poišči n-ti odvod funkcije $f(x)=\mathrm{e}^{-3x}$!

Izračunajmo prvih najprej nekaj odvodov:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -3\mathrm{e}^{-3x}\\
f''(x) &= (-3)^2\mathrm{e}^{-3x}\\
f'''(x) &= (-3)^3\mathrm{e}^{-3x}
\end{aligned}$$

Od tu se takoj vidi splošna formula za n-ti odvod:

$$f^{(n)}(x) = (-3)^n \mathrm{e}^{-3x}.$$

11. Poišči n-ti odvod funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2-a^2}$, $a \in \mathbb{R}$, tako da jo zapišeš s parcialnimi ulomki!

    Funkcijo $f(x)$ najprej zapišemo s parcialnimi ulomki.

    $$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a} = \frac{(A+B)x + a(A-B)}{x^2-a^2}$$

    Dobimo sistem enačb $A+B = 0$ in $a(A-B) = 1$, ki ima rešitev $A = \frac{1}{2a}$ in $B = -\frac{1}{2a}$.
    Funkcijo $f(x)$ sedaj odvajamo:

    $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2a(x-a)} - \frac{1}{2a(x+a)} = \frac{1}{2a}\left((x-a)^{-1} - (x+a)^{-1}\right) \\ f'(x) &= \frac{1}{2a}\left(-(x-a)^{-2} + (x+a)^{-2}\right) \\ f''(x) &= \frac{1}{2a}\left(2(x-a)^{-3} - 2(x+a)^{-3}\right) \\ f'''(x) &= \frac{1}{2a}\left(-6(x-a)^{-4} + 6(x+a)^{-4}\right) \end{aligned}$$

    Od tu izpeljemo splošno formulo za n-ti odvod:

    $$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2a}(-1)^n n! \left((x-a)^{-n-1} - (x+a)^{-n-1}\right).$$

12. Določi parametra a in b tako, da bo funkcija

    $$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x + x^2 + 1, & x < 0, \\ ax + b, & x \geq 0 \end{cases}$$

    zvezno odvedljiva!

    Funkcija je zvezno odvedljiva, ko sta funkcija in njen odvod zvezni funkciji. Edina možna točka nezveznosti je v $x = 0$. Torej mora veljati $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x)$ in $\lim_{x\uparrow 0} f'(x) = \lim_{x\downarrow 0} f'(x)$.

    $$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow 0} f(x) &= \lim_{x\uparrow 0}(\mathrm{e}^x + x^2 + 1) = 2 \\ \lim_{x\downarrow 0} f(x) &= \lim_{x\downarrow 0}(ax + b) = b \end{aligned}$$

Da bo funkcija zvezna, mora biti $b = 2$.
Odvod funkcije se glasi:

$$f'(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x + 2x, & x < 0, \\ a, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\uparrow 0} f'(x) &= \lim_{x\uparrow 0}(\mathrm{e}^x + 2x) = 1 \\ \lim_{x\downarrow 0} f'(x) &= \lim_{x\downarrow 0} a = a \end{aligned}$$

Da bo odvod funkcije zvezen, mora biti $a = 1$.

13. Določi intervale naraščanja in padanja funkcije $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$!

Funkcijo najprej odvajamo:

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Funkcija je naraščajoča na intervalu, kjer je $f'(x) > 0$. Rešiti je potrebno neenačbo:

$$\begin{aligned} \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} &> 0 \\ 1 - x^2 &> 0 \\ x^2 &< 1 \\ |x| &< 1 \end{aligned}$$

Torej je funkcija naraščajoča na intervalu $(-1, 1)$.
Funkcija je padajoča na intervalu, kjer je $f'(x) < 0$. Kot prej dobimo, da je funkcija padajoča na uniji intervalov $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.