Enajsta vaja iz matematike 1

Andrej Perne

Ljubljana, 2006/07

UPORABA INTEGRALOV

Ploščina lika, ki je omejen s krivuljo $y = f(x)$ ter premicami $y = 0$, $x = a$ in $x = b$:

$$S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Ploščina lika, ki je omejen s krivuljama $y = f(x)$ in $y = g(x)$, kjer sta a in b abscisi presečišč:

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\mathrm{d}x$$

Dolžina loka krivulje $y = f(x)$ med točkama a in b:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\mathrm{d}x$$

Volumen rotacijskega telesa, ki nastane, če krivuljo $y = f(x)$ med točkama a in b zavrtimo okrog x osi:

$$V = \pi \int_a^b y^2\mathrm{d}x$$

Površina rotacijskega telesa, ki nastane, če krivuljo $y = f(x)$ med točkama a in b zavrtimo okrog x osi:

$$P = 2\pi \int_a^b y\mathrm{d}s$$

1. Izračunaj integral $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$, kjer je $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - x^2, & |x| \leq 1, \\ 1 - |x|, & |x| > 1 \end{array} \right.$!

Ker imamo podane različne predpise, integral izračunamo tako, da vzamemo posamezne odseke, kjer je funkcija enolično definirana. Skica je priporočljiva.

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{-1}(1+x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x + \int_{1}^{2}(1-x)\mathrm{d}x \\
&= \left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{1}^{2} \\
&= -1+\frac{1}{2}+2-2+1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+2-2-1+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

2. Izračunaj ploščino lika, ki je omejen s krivuljo $y=\frac{6}{5-4x-x^2}$ in premicami $x=2$, $x=3$ ter abscisno osjo!

   Ploščino izračunamo po zgornji formuli.

$$\begin{aligned}
S &= \int_{2}^{3}\frac{6}{5-4x-x^2}\mathrm{d}x = \int_{2}^{3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x+5}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(-\ln|1-x|+\ln|x+5|\right)\Big|_{2}^{3} \\
&= \ln 1-\ln 2+\ln 8-\ln 7=\ln\frac{4}{7}
\end{aligned}$$

   To je integral racionalne funkcije, ki ga rešimo s pomočjo parcialnih ulomkov:

$$\frac{6}{5-4x-x^2}=\frac{A}{1-x}+\frac{B}{x+5}=\frac{(A-B)x+5A+B}{5-4x-x^2}.$$

   Dobimo sistem enačb $A-B=0$ in $5A+B=6$, ki ima rešitev $A=1$ in $B=1$.

3. Izračunaj ploščino lika med grafom funkcije $f(x)=\sin x+\cos x+x$, abscisno osjo ter premicama $x=0$ in $x=\pi$!

   Ploščino izračunamo po zgornji formuli.

$$\begin{aligned}
S &= \int_{0}^{\pi}(\sin x+\cos x+x)\,\mathrm{d}x = \left(-\cos x+\sin x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} \\
&= -\cos\pi+\sin\pi+\frac{\pi^2}{2}+\cos 0+\sin 0+0=2+\frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}$$

4. Izračunaj ploščino lika, ki je omejen s krivuljami $y = (x+1)^2$, $x = \sin \pi y$ in $y = 0$!

   Območje razdelimo na dva dela in izračunamo ploščino vsakega dela posebej po zgornji formuli. Skica je priporočljiva.
   Parabola $y = (x+1)^2$ se dotakne abscisne osi v točki $x = -1$ in se seka s krivuljo $x = \sin \pi y$ v točki $(0, 1)$, zato je ploščina prvega dela enaka:

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (x^2 + 2x + 1) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{3}.$$

   Krivulja $x = \sin \pi y$ seka ordinatno os med drugim v točkah $y = 0$ in $y = 1$, zato je ploščina drugega dela enaka:

$$S_2 = \int_0^1 \sin \pi y \mathrm{d}y = -\frac{1}{\pi} \cos \pi y \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

   Pozor! Tu integriramo po spremenljivki y.
   Ploščina območja je torej:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} = \frac{\pi + 6}{3\pi}.$$

5. Izračunaj dolžino loka krivulje $y^2 = x^3$ med presečiščema s premico $2y = x$!

   Najprej izračunajmo presečišča. Ker je $x = 2y$, je $x^3 = 8y^3$. Rešujemo enačbo $y^2 = 8y^3$, oz. $y^2(8y - 1)$, ki ima rešitve $y_{1,2} = 0$ in $y_3 = \frac{1}{8}$. To nam da $x_{1,2} = 0$ in $x_3 = \frac{1}{4}$.
   Presečišči sta tako točki $T_1(0, 0)$ in $T_2(\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$.
   Dolžino loka izračunamo po zgornji formuli. Ker je $y = x^{\frac{3}{2}}$, je $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} \mathrm{d}x = \frac{4}{9} \int_1^{\frac{25}{16}} t^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{9} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^{\frac{25}{16}} = \frac{8}{27} \left(\frac{125}{64} - 1 \right) = \frac{61}{216} \end{aligned}$$

   Uvedli smo novo spremenljivko $t = 1 + \frac{9}{4} x$ z diferencialom $\mathrm{d}t = \frac{9}{4} \mathrm{d}x$. Ko je $x = 0$, je $t = 1$, in ko je $x = \frac{1}{4}$, je $t = \frac{25}{16}$.

6. Izračunaj dolžino loka krivulje $y = \mathrm{ch} x$ za $-1 < x < 1$!

Dolžino loka izračunamo po zgornji formuli. Ker je $y = \mathrm{ch}x$, je $y' = \mathrm{sh}x$. Velja formula: $\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$.

$$\begin{aligned} s &= \int_{-1}^{1} \sqrt{1+\mathrm{sh}^2x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sqrt{\mathrm{ch}^2x}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{ch}x\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{sh}x\Big|_{-1}^{1} = \mathrm{sh}1 - \mathrm{sh}(-1) = 2\mathrm{sh}1 = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

7. Izračunaj volumen telesa, ki nastane, če krivuljo $y = 3\sqrt{x(1-x)^3}$, $0 < x < 1$, zavrtimo okrog x osi!

   Volumen izračunamo po zgornji formuli.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \left(3\sqrt{x(1-x)^3}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 9x(1-x)^3\mathrm{d}x \\ &= 9\pi \int_0^1 (x - 3x^2 + 3x^3 - x^4)\mathrm{d}x = 9\pi \left(\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{3x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= 9\pi \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{9\pi}{20} \end{aligned}$$

8. Izračunaj volumen telesa, ki nastane, če krivuljo $y = \mathrm{e}^{-x}$, $0 < x < 3$, zavrtimo okrog x osi!

   Volumen izračunamo po zgornji formuli.

$$V = \pi \int_0^3 \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^3 = \frac{(1-\mathrm{e}^{-6})\pi}{2}$$

9. Izračunaj površino telesa, ki nastane, če funkcijo $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $0 < x < 1$, zavrtimo okoli x osi!

   Diferencial loka ds izračunamo takole: $\mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x$.
   Odvod funkcije $y = \sqrt{1-x^2}$ je enak:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Torej:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

   Površino izračunamo po zgornji formuli.

$$P = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}x = 2\pi x\Big|_0^1 = 2\pi$$