Tretja vaja iz matematike 1

Andrej Perne

Ljubljana, 2006/07

KOMPLEKSNA ŠTEVILA

Polarni zapis kompleksnega števila ($z = x + \mathrm{i}y$):
$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$
Opomba: Velja Eulerjeva formula: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$.
Zveze med obema zapisoma:

$$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r\sin\varphi \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$$

Tabela:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Operacije s polarnim zapisom:
$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$
$z \cdot w = |z| \cdot |w|(\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \psi))$
$z^2 = |z|^2(\cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi)$
$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$ DeMoivreova formula

1. Zapiši naslednja kompleksna števila v polarni obliki!

   a $z = 1 + \mathrm{i}$

   Vidimo: $x = 1$, $y = 1$; od koder izračunamo: $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ in $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{1}{1} = \mathrm{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$.
   Polarna oblika: $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

b $z = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$

Vidimo: $x = -1$, $y = -\sqrt{3}$; od koder izračunamo: $r = \sqrt{4} = 2$ in $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{-1} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$.
Opomba: Kotu smo prišteli π, ker število leži v tretjem kvadrantu. Pri tem upoštevamo, da je funkcija tg periodična s periodo π.
Polarna oblika: $z = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{3}}$.

c $z = -\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$

Vidimo: $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$; od koder izračunamo: $r = \sqrt{4} = 2$ in $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$.
Polarna oblika: $z = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$.

2. Izračunaj vrednost izraza $(-\sqrt{3}+3\mathrm{i})^7$ s pomočjo DeMoivreove formule!

Najprej zapišimo število $z = -\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$ v polarno obliko. Vidimo: $x = -\sqrt{3}$, $y = 3$; od koder izračunamo: $r = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$ in $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{3}{-\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$.
Polarna oblika: $z = 2\sqrt{3}(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3})$.
Sedaj uporabimo DeMoivreovo formulo in dobimo:

$$\begin{aligned}(-\sqrt{3}+3\mathrm{i})^7 &= (2\sqrt{3})^7\left(\cos\left(7\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(7\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right)\\ &= 128\cdot 27\sqrt{3}\left(\cos\frac{14\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{14\pi}{3}\right)\\ &= 3456\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

Na zadnjem koraku smo upoštevali, da sta funkciji sin in cos periodični s periodo 2π.

3. Reši naslednje ciklometrične enačbe!

a $z^3 = 1$

Najprej zapišemo levo in desno stran enačbe v polarni obliki. Velja: $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ oz. $z^3 = |z|^3(\cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi)$ in $1 = 1\cdot(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$. Torej dobimo enačbo

$$|z|^3(\cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi) = 1\cdot(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0).$$

Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enak radij in enak kot. Zato rešimo enačbi: $|z|^3 = 1$ in $\cos 3\varphi = \cos 0$. Prva ima rešitev

$|z| = 1$, druga pa $3\varphi = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, torej $\varphi_k = \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.
Tako dobimo tri kote: $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$ in $\varphi_2 = \frac{4\pi}{3}$. Ti nam dajo tri rešitve po formuli $w_k = |z|(\cos\varphi_k + \mathrm{i}\sin\varphi_k)$, $k = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \cdot (\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = 1, \\ w_1 &= 1 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ w_2 &= 1 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Rešitve enačbe ležijo na krožnici z radijem 1 in so enakomerno razporejene.

b $z^3 = \mathrm{i}$

Najprej zapišemo levo in desno stran enačbe v polarni obliki. Velja: $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ oz. $z^3 = |z|^3(\cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi)$ in $\mathrm{i} = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})$. Torej dobimo enačbo

$$|z|^3(\cos 3\varphi + \mathrm{i}\sin 3\varphi) = 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enak radij in enak kot. Zato rešimo enačbi: $|z|^3 = 1$ in $\cos 3\varphi = \cos\frac{\pi}{2}$. Prva ima rešitev $|z| = 1$, druga pa $3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, torej $\varphi_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.
Tako dobimo tri kote: $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_1 = \frac{5\pi}{6}$ in $\varphi_2 = \frac{3\pi}{2}$. Ti nam dajo tri rešitve po formuli $w_k = |z|(\cos\varphi_k + \mathrm{i}\sin\varphi_k)$, $k = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} w_0 &= 1 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}, \\ w_1 &= 1 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}, \\ w_2 &= 1 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Rešitve enačbe ležijo na krožnici z radijem 1 in so enakomerno razporejene.

c $z^4 = -8 + 8\mathrm{i}\sqrt{3}$

Najprej zapišemo levo in desno stran enačbe v polarni obliki. Velja: $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ oz. $z^4 = |z|^4(\cos 4\varphi + \mathrm{i}\sin 4\varphi)$

in $-8+8\mathrm{i}\sqrt{3} = 16(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3})$. ($r=\sqrt{64+3\cdot 64}=16$, $\psi = \mathrm{arctg}\frac{8\sqrt{3}}{-8} = \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$) Torej dobimo enačbo

$$|z|^4(\cos 4\varphi + \mathrm{i}\sin 4\varphi) = 16(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}).$$

Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enak radij in enak kot. Zato rešimo enačbi: $|z|^4 = 16$ in $\cos 4\varphi = \cos\frac{2\pi}{3}$. Prva ima rešitev $|z| = 2$, druga pa $4\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, torej $\varphi_k = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k = 0,1,2,3$.
Tako dobimo štiri kote: $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$, $\varphi_1 = \frac{2\pi}{3}$, $\varphi_2 = \frac{7\pi}{6}$ in $\varphi_3 = \frac{5\pi}{3}$. Ti nam dajo štiri rešitve po formuli $w_k = |z|(\cos\varphi_k + \mathrm{i}\sin\varphi_k)$, $k = 0,1,2,3$:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}+\mathrm{i},\\
w_1 &= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1+\mathrm{i}\sqrt{3},\\
w_2 &= 2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}-\mathrm{i},\\
w_3 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1-\mathrm{i}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Rešitve enačbe ležijo na krožnici z radijem 2 in so enakomerno razporejene.

4. Reši naslednje enačbe!

a $|z| + z = 2 + \mathrm{i}$

Zapišemo $z = x + \mathrm{i}y$ in dobimo: $\sqrt{x^2+y^2} + x + \mathrm{i}y = 2 + \mathrm{i}$. Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enaki realni in imaginarni komponenti. Torej dobimo sistem dveh enačb: $\sqrt{x^2+y^2} + x = 2$ in $y = 1$. Ko drugo vstavimo v prvo, dobimo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1}+x &= 2\\
\sqrt{x^2+1} &= 2-x\\
x^2+1 &= 4-4x+x^2\\
4x &= 3\\
x &= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Rešitev enačbe je torej število $z = \frac{3}{4} + \mathrm{i}$.

b $2z^2 - 3\overline{z}^2 = 10\mathrm{i}$

Zapišemo $z = x + \mathrm{i}y$ in dobimo:

$$\begin{aligned} 2(x+\mathrm{i}y)^2 - 3(x-\mathrm{i}y)^2 &= 10\mathrm{i} \\ -x^2 + y^2 + 10xy\mathrm{i} &= 10\mathrm{i} \end{aligned}$$

Dve kompleksni števili sta enaki, ko imata enaki realni in imaginarni komponenti. Torej dobimo sistem dveh enačb: $y^2 - x^2 = 0$ in $10xy = 10$. Iz prve enačbe dobimo $y^2 = x^2$ oz. $y = \pm x$. To vstavimo v drugo enačbo in dobimo $x^2 = 1$, torej $x = \pm 1$ in zato $y = \pm 1$. x in y morata biti hkrati pozitivna oz. negativna, zato dobimo dve rešitvi enačbe: $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ in $z_2 = -1 - \mathrm{i}$.

5. Reši sisteme enačb!

a $|z-2| = 3$, $|z+1| = 3$

Vzamemo $z = x + \mathrm{i}y$. Iz prve enačbe dobimo:

$$\begin{aligned} |x + \mathrm{i}y - 2| &= 3 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 9 \end{aligned}$$

Iz druge enačbe pa dobimo:

$$\begin{aligned} |x + \mathrm{i}y + 1| &= 3 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 9 \end{aligned}$$

Dobljeni enačbi odštejemo in dobimo enačbo $6x = 3$, ki ima rešitev $x = \frac{1}{2}$. Vstavimo to rešitev v enačbo $y^2 = 9 - (x+1)^2$ in dobimo $y^2 = \frac{27}{4}$, torej $y_{1,2} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Rešitvi sistema sta kompleksni števili $z_1 = \frac{1}{2} + \frac{3\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ in $z_2 = \frac{1}{2} - \frac{3\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

b $\left|\frac{z}{z+1}\right| = 1$, $\frac{z}{\bar{z}} = \mathrm{i}$

Vzamemo $z = x + \mathrm{i}y$. Rešimo najprej drugo enačbo in dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{x + \mathrm{i}y}{x - \mathrm{i}y} &= \mathrm{i} \\ \frac{x^2 + 2\mathrm{i}xy - y^2}{x^2 + y^2} &= \mathrm{i} \\ \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{xy}{x^2 + y^2} &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

Primerjava realnih komponent nam da $x^2 - y^2 = 0$, oz. $x^2 = y^2$, primerjava imaginarnih komponent pa $\frac{xy}{x^2+y^2} = 1$, od koder sledi $\frac{xy}{2x^2} = 1$, torej $y = x$. Iz druge enačbe pa dobimo:

$$\begin{aligned}
|z| &= |z+1| \\
x^2 + y^2 &= (x+1)^2 + y^2 \\
x^2 &= x^2 + 2x + 1 \\
2x &= -1 \\
x &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Torej $x = -\frac{1}{2}$ in $y = -\frac{1}{2}$, zato je edina rešitev sistema $z = -\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$.

c $z\overline{z} + (2+\mathrm{i})z + (2-\mathrm{i})\overline{z} + 4 = 0$, $(1-\mathrm{i})z + (1+\mathrm{i})\overline{z} + 4 = 0$

Vzamemo $z = x + \mathrm{i}y$. Iz druge enačbe dobimo:

$$\begin{aligned}
(1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) + (1+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}y) + 4 &= 0 \\
x + \mathrm{i}y - \mathrm{i}x + y + x - \mathrm{i}y + \mathrm{i}x + y + 4 &= 0 \\
2x + 2y + 4 &= 0 \\
y &= -x - 2
\end{aligned}$$

Iz prve enačbe ob upoštevanju gornjega rezultata dobimo:

$$\begin{aligned}
(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y) + (2+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) + (2-\mathrm{i})(x-\mathrm{i}y) + 4 &= 0 \\
x^2 + y^2 + 2x + \mathrm{i}x + 2\mathrm{i}x - y + 2x - \mathrm{i}x - 2\mathrm{i}y - y + 4 &= 0 \\
x^2 + 4x + y^2 - 2y + 4 &= 0 \\
x^2 + 4x + (-x-2)^2 - 2(-x-2) + 4 &= 0 \\
2x^2 + 10x + 12 &= 0 \\
2(x+2)(x+3) &= 0
\end{aligned}$$

Sledi $x_1 = -2$ in $x_2 = -3$, od koder dobimo $y_1 = 0$ in $y_2 = 1$. Rešitvi sistema sta dve: $z_1 = -2$ in $z_2 = -3 + \mathrm{i}$.

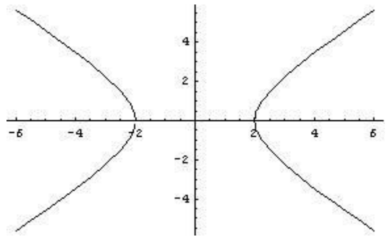
6. Nariši podmnožice kompleksne ravnine!

a $\Re(\overline{z}^2) = 4$

Vzamemo $z = x + \mathrm{i}y$ in dobimo:

$$\begin{aligned}
\Re((x-\mathrm{i}y)^2) &= 4 \\
\Re(x^2 - 2\mathrm{i}xy - y^2) &= 4 \\
x^2 - y^2 &= 4 \\
\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} &= 1
\end{aligned}$$

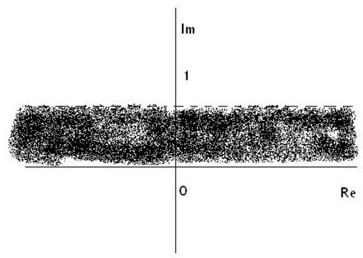
Dobili smo enačbo hiperbole s polosema $a = 2$ in $b = 2$.



Slika 1: Slika $\Re(\overline{z}^2) = 4$.

b $0 \leq \Im(z) < 1$

Če vzamemo $z = x + \mathrm{i}y$, dobimo enačbo $0 \leq y < 1$, to pa predstavlja pas med premicama $y = 0$ in $y = 1$, kjer druge premice ni zraven, prva pa je.



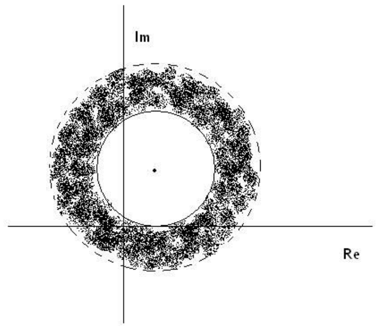
Slika 2: Slika $0 \leq \Im(z) < 1$.

c $2 \leq |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3$

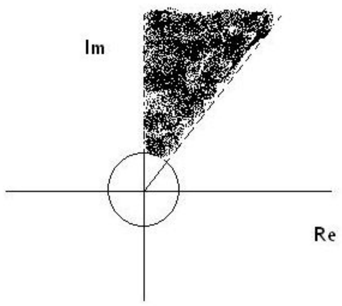
Enačba $|z - z_0| = r$ predstavlja krožnico s središčem v točki z_0 in radijem r. Gornji sistem neenačb tako predstavlja kolobar s središčem v točki $1 + 2\mathrm{i}$, kjer je notranja krožnica z radijem $r = 2$ zraven, zunanja z radijem $r = 3$ pa ne.

d $\{z \in \mathbb{C}; \frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{2}, |z| > 1\}$

Prvi neenačbi zadoščajo vsa kompleksna števila z argumentom strogo med $\frac{\pi}{4}$ in $\frac{\pi}{2}$, drugi pa vsa kompleksna števila, ki so za več kot 1 oddaljena od izhodišča.



Slika 3: Slika $2 \leq |z - 1 - 2\mathrm{i}| < 3$.



Slika 4: Slika $\frac{\pi}{4} < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$, $|z| > 1$.