Dvanajsta vaja iz matematike 1

Andrej Perne

Ljubljana, 2006/07

KRIVULJE V POLARNI IN PARAMETRIČNI OBLIKI

Ploščina lika, ki je omejen s krivuljo v polarnih koordinatah ($r = r(\varphi)$):

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \mathrm{d}\varphi$$

Ploščina lika, ki je omejen s krivuljo v parametrični obliki ($x = x(t)$, $y = y(t)$):

$$S = \frac{1}{2}\int_{a}^{b} (x\dot{y} - \dot{x}y)\mathrm{d}t$$

Dolžina loka krivulje v polarnih koordinatah ($r = r(\varphi)$):

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r')^2 + r^2}\mathrm{d}\varphi$$

Dolžina loka krivulje v parametrični obliki ($x = x(t)$, $y = y(t)$):

$$s = \int_{a}^{b} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\mathrm{d}t$$

Volumen rotacijskega telesa, ki nastane, če krivuljo v polarnih koordinatah ($r = r(\varphi)$) zavrtimo okrog x osi:

$$V = \pi\int_{\alpha}^{\beta} r^2 \mathrm{d}\varphi$$

Volumen rotacijskega telesa, ki nastane, če krivuljo v parametrični obliki ($x = x(t)$, $y = y(t)$) zavrtimo okrog x osi:

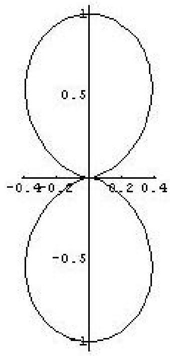
$$V = \pi\int_{a}^{b} y^2\dot{x}\mathrm{d}t$$

Površina rotacijskega telesa, ki nastane, če krivuljo v parametrični obliki ($x = x(t)$, $y = y(t)$) zavrtimo okrog x osi:

$$P = 2\pi \int_a^b y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\mathrm{d}t$$

1. Izračunaj ploščino območja $r = \sin^2 \varphi$, $0 < \varphi < \pi$!

   Funkcija je podana v polarnih koordinatah. Graf take funkcije narišemo tako, da pri posameznih kotih izračunamo radij. Po vrsti dobimo za kote $\varphi = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ radije $r = 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1$. Tako nadaljujemo še za ostale kote od 0 do 2π in dobimo dvojno zanko (osmico). Ker računamo



Slika 1: Graf krivulje $r = \sin^2 \varphi$, $0 < \varphi < \pi$

ploščino le za $0 < \varphi < \pi$, je to le ploščina zgornje zanke. Uporabimo zgornjo formulo.

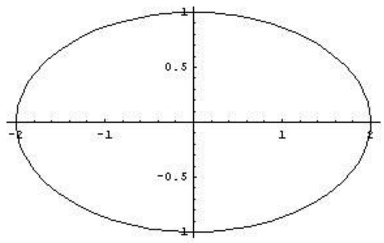
$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin^4 \varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\varphi \sin^3\varphi \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{2}\left(\underbrace{-\cos\varphi\sin^3\varphi\Big|_0^\pi}_{=0} + 3\int_0^\pi \sin^2\varphi\cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi\right) \\
&= \frac{3}{2}\int_0^\pi \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{3}{8}\int_0^\pi \frac{1-\cos^4\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{3}{16}\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{3\pi}{16}
\end{aligned}$$

V drugi vrstici smo integral izračunali per partes. Vzeli smo $u = \sin^3\varphi$, $\mathrm{d}v = \sin\varphi \mathrm{d}\varphi$, in zato $\mathrm{d}u = 3\sin^2\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$, $v = -\cos\varphi$.

V tretji vrstici smo upoštevali še formulo za sinus polovičnega kota: $\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}$.

2. Izračunaj ploščino zanke $x = 2\cos t$, $y = \sin t$!

   Funkcija je podana v parametrični obliki. Graf take funkcije narišemo tako, da za vsako vrednost parametra t izračunamo koordinati x in y. V našem primeru je zanka elipsa z glavnima polosema $a = 2$ in $b = 1$. Uporabimo zgornjo formulo. Ker je $x(t) = 2\cos t$, je $\dot{x}(t) = -2\sin t$ in



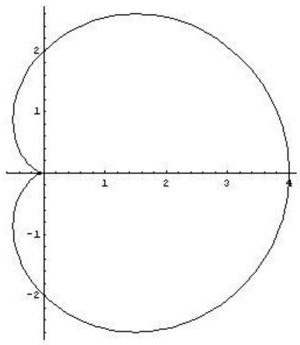
Slika 2: Graf krivulje $x = 2\cos t$, $y = \sin t$

   ker je $y(t) = \sin t$, je $\dot{y}(t) = \cos t$.

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(2\cos^2 t + 2\sin^2 t\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \underbrace{(\cos^2 t + \sin^2 t)}_{=1} \mathrm{d}t \\
&= t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi
\end{aligned}
$$

3. Izračunaj dolžino zanke $r = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$!

   Krivulja ima sklenjen graf. (Slika za $a = 2$.) Ker je $r = a(1 + \cos\varphi)$, je $r' = -a\sin\varphi$ in zato je $r^2 = a^2(1 + \cos\varphi)^2$ in $(r')^2 = a^2\sin^2\varphi$. Dolžino zanke izračunamo po zgornji formuli. Zanka se zaključi, ko φ preteče vse kote od 0 do 2π. Ker sta zgornji in spodnji del zanke enaka,



Slika 3: Graf krivulje $r = 2(1 + \cos\varphi)$

lahko integriramo samo od 0 do π in množimo z 2.

$$
\begin{aligned}
s &= 2\int_0^\pi \sqrt{a^2\sin^2\varphi + a^2(1+\cos\varphi)^2}\mathrm{d}\varphi \\
&= 2a\int_0^\pi \sqrt{\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{=1} + 1 + 2\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi \\
&= 2a\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2a\int_0^\pi \sqrt{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\mathrm{d}\varphi \\
&= 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi \\
&= 8a\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 8a
\end{aligned}
$$

V tretji vrstici smo upoštevali formulo za kosinus polovičnega kota: $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

4. Izračunaj dolžino loka krivulje $x = \frac{t^6}{6}$, $y = 2 - \frac{t^4}{4}$, $y > 0$!

   Ker mora biti $y > 0$, je $2 - \frac{t^4}{4} > 0$, torej $t^4 < 8$ in zato $t < \sqrt[4]{8}$.
   Ker je $x(t) = \frac{t^6}{6}$, je $\dot{x}(t) = t^5$ in zato $\dot{x}^2(t) = t^{10}$.
   Ker je $y(t) = 2 - \frac{t^4}{4}$, je $\dot{y}(t) = t^3$ in zato $\dot{y}^2(t) = t^6$.

Dolžino loka izračunamo po zgornji formuli.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\sqrt[4]{8}} \sqrt{t^{10}+t^6}\mathrm{d}t = \int_0^{\sqrt[4]{8}} t^3\sqrt{t^4+1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\int_1^9 u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{6}u^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 \\ &= \frac{1}{6}(27-1) = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

V drugi vrstici smo uporabili substitucijo $u = t^4+1$ z diferencialom $\mathrm{d}u = 4t^3\mathrm{d}t$. Ko je $t=0$, je $u=1$ in ko je $t=\sqrt[4]{8}$, je $u=9$.

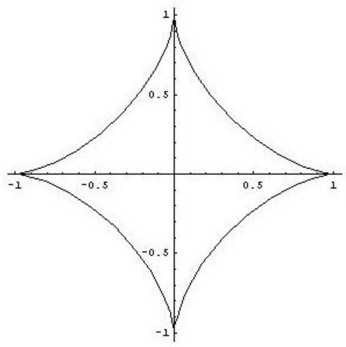
5. Izračunaj volumen telesa, ki nastane, če se krivulja $r=\sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ zavrti okrog osi x!

   Volumen izračunamo po zgornji formuli.

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 \mathrm{d}\varphi = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\pi}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

6. Izračunaj volumen in površino telesa, ki nastane, če zavrtimo astroido $x = a\sin^3 t$, $y = a\cos^3 t$ okrog osi x!

   Graf astroide za $a=1$. Ker je $x(t) = a\sin^3 t$, je $\dot{x}(t) = 3a\sin^2 t\cos t$ in



Slika 4: Graf krivulje $x=\sin^3 t$, $y=\cos^3 t$

ker je $y(t) = a\cos^3 t$, je $\dot{y}(t) = -3a\cos^2 t \sin t$.
Volumen rotacijskega telesa izračunamo po zgornji formuli.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^{\pi} a^2 \cos^6 t \cdot 3a \sin^2 t \cos t \mathrm{d}t \\
&= 2 \cdot 3\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^3 \sin^2 t \cos t \mathrm{d}t \\
&= 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-u^2)^3 u^2 \mathrm{d}u = 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(u^2 - 3u^4 + 3u^6 - u^8\right) \mathrm{d}u \\
&= 6\pi a^3 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{3u^5}{5} + \frac{3u^7}{7} - \frac{u^9}{9}\right)\Bigg|_0^1 = 6\pi a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9}\right) \\
&= 6\pi a^3 \cdot \frac{16}{315} = \frac{32\pi a^3}{105}
\end{aligned}$$

V drugi vrstici smo uporabili enakost $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ in simetrijo astroide.
V tretji vrstici pa smo uporabili substitucijo $u = \sin t$ z diferencialom $\mathrm{d}u = \cos t \mathrm{d}t$. Ko je $t = 0$, je $u = 0$ in ko je $t = \frac{\pi}{2}$, je $u = 1$.
Površino rotacijskega telesa izračunamo po zgornji formuli. Najprej:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= \sqrt{9a^2 \sin^4 t \cos^2 t + 9a^2 \sin^2 t \cos^4 t} \\
&= \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^2 t \underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1}} = 3a \sin t \cos t
\end{aligned}$$

Torej:

$$\begin{aligned}
P &= 2\pi \int_0^{\pi} a\cos^3 t \cdot 3a \sin t \cos t \mathrm{d}t \\
&= 6\pi a^2 \int_0^{\pi} \cos^4 t \sin t \mathrm{d}t = 6\pi a^2 \int_1^{-1} (-u^4) \mathrm{d}u \\
&= 6\pi a^2 \frac{u^5}{5}\Big|_{-1}^{1} = \frac{12\pi a^2}{5}
\end{aligned}$$

V drugi vrstici pa smo uporabili substitucijo $u = \cos t$ z diferencialom $\mathrm{d}u = -\sin t \mathrm{d}t$. Ko je $t = 0$, je $u = 1$ in ko je $t = \pi$, je $u = -1$. Upoštevamo še formulo $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.