Prva vaja iz matematike 1

Andrej Perne

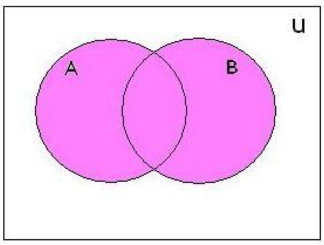
Ljubljana, 2006/07

MNOŽICE

Osnovne definicije:
$A \subseteq B$, če za vsak $x \in A$ velja $x \in B$: A podmnožica B.
$A = B$ natanko tedaj, ko je $A \subseteq B$ in hkrati $B \subseteq A$: enakost dveh množic.
$|A|$ moč množice = številu elementov v množici.

- Unija množic: $A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$
- Presek množic: $A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$
- Razlika množic: $A - B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$
- Komplement množice: $A^C = \overline{A} = \mathcal{U} - A = \{x \in \mathcal{U}; x \notin A\}$

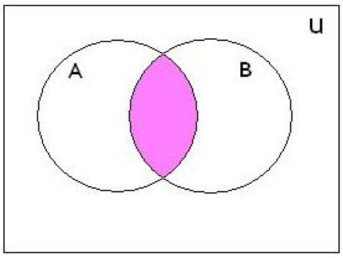
Množici A in B sta disjunktni, če je $A \cap B = \emptyset$.
Velja: $A - B = A \cap B^C$ in $(A^C)^C = A$



Slika 1: Unija množic $A \cup B$

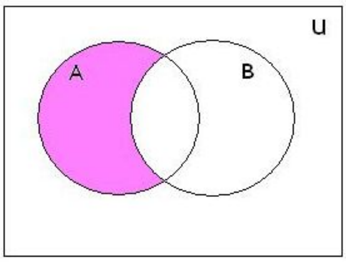
Lastnosti unije in preseka:

- Komutativnost preseka: $A \cap B = B \cap A$
- Komutativnost unije: $A \cup B = B \cup A$
- Asociativnost preseka: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- Asociativnost unije: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- Distributivnost: $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- Distributivnost: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$



Slika 2: Presek množic $A \cap B$

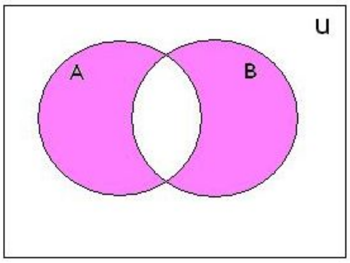
Velja: $A \cap A^C = \emptyset$, $A \cup A^C = \mathcal{U}$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \mathcal{U} = A$, $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$



Slika 3: Razlika množic $A - B$

DeMorganova zakona:

- $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$
- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$



Slika 4: Simetrična razlika množic $A \triangle B$

Simetrična razlika množic:

$A \triangle B := (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

Potenčna množica:

$\mathcal{P}(A) = \{X; X \subseteq A\}$

$|A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$

Kartezični produkt množic:

$A \times B = \{(x, y); x \in A, y \in B\}$

1. Dokaži DeMorganov zakon $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$!

   Da dokažemo, da sta dve množici enaki, je potrebno dokazati, da je ena vsebovana v drugi in obratno. V ta namen vzamemo poljuben element iz ene množice in pokažemo, da je tudi v drugi množici in obratno.

   $$x \in (A \cup B)^C \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A^C \cap B^C$$

2. Dokaži distributivnostni zakon $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$!

   Podobno kot v prejšnji nalogi vzamemo en element iz prve množice in pokažemo, da leži tudi v drugi množici (in obratno).

   $$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C &\Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup C \wedge x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

3. Poenostavi izraze!

   a $A - (A - B) = A \cap (A \cap B^C)^C = A \cap (A^C \cup B) = (A \cap A^C) \cup (A \cap B) = A \cap B$

b $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A \cap (B \cup B^C) = A$

c $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup C^C) \cap (B \cup C^C) = (A \cup B) \cap C^C = (A \cup B) - C$

4. Določi potenčne množice naslednjih množic!

a $\mathcal{P}(\{a, b, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

b $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

c $\mathcal{P}(\{1, \{1, 2\}, \{3\}\}) =$
$\{\emptyset, \{1\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{3\}\}, \{1, \{1, 2\}\}, \{1, \{3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{1, \{1, 2\}, \{3\}\}\}$

5. Dokaži, da velja: $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$!

Kot v prvi in drugi nalogi dokazujemo enakost množic. V tem primeru bomo pokazali vsako vsebovanost posebej. Najprej vsebovanost $\subseteq$:

$$\begin{aligned} x \in (A - B) \times C &\Rightarrow x = (u, v), u \in A - B, v \in C \\ &\Rightarrow u \in A, u \notin B, v \in C \\ &\Rightarrow x = (u, v) \in A \times C, x \notin B \times C \\ &\Rightarrow x \in (A \times C) - (B \times C) \end{aligned}$$

Nato še vsebovanost $\supseteq$:

$$\begin{aligned} x \in (A \times C) - (B \times C) &\Rightarrow x \in A \times C, x \notin B \times C \\ &\Rightarrow x = (u, v), u \in A, v \in C, u \notin B \\ &\Rightarrow u \in A - B, v \in C \\ &\Rightarrow x = (u, v) \in (A - B) \times C \end{aligned}$$

6. $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ univerzalna množica, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ preslikavi in $A = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}; g(x) = 0\}$. Izrazi z množicama A in B množice rešitev naslednjih enačb!

i $f(x) \cdot g(x) = 0$

$$C = \{x; f(x) \cdot g(x) = 0\} = \{x; f(x) = 0 \vee g(x) = 0\} = A \cup B$$

ii $f^2(x) + g^2(x) = 0$

$$D = \{x; f^2(x) + g^2(x) = 0\} = \{x; f(x) = 0 \wedge g(x) = 0\} = A \cap B$$

iii $g^2(x) \cdot f^2(x) + g^2(x) = 0$

$$E = \{x; g^2(x) \cdot f^2(x) + g^2(x) = 0\} = \{x; g(x) = 0\} = B$$

ENAČBE IN NEENAČBE

7. Reši naslednje enačbe!

a $2x^2 + 7x - 15 = 0$

To je kvadratna enačba oblike $ax^2 + bx + c = 0$, ki ima dve rešitvi, ki ju dobimo s formulo $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+120}}{4} = \frac{-7 \pm 13}{4}$
$\Rightarrow x_1 = -5, x_2 = \frac{3}{2}$

b $\sqrt{5x+1} - \sqrt{2x+3} = \sqrt{7x-20}$

Enačbo kvadriramo in dobimo:

$$\begin{aligned} 5x + 1 - 2\sqrt{(5x+1)(2x+3)} + 2x + 3 &= 7x - 20 \\ \sqrt{10x^2 + 17x + 3} &= 12 \\ 10x^2 + 17x + 3 &= 144 \\ 10x^2 + 17x - 141 &= 0 \end{aligned}$$

$x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 + 4 \cdot 10 \cdot 141}}{20} = \frac{-17 \pm 77}{20}$
Sledi: $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{47}{10}$ in samo prva rešitev je dobra.

8. Reši enačbe z absolutno vrednostjo!

a $x + |x + 1| = 3$

Absolutna vrednost je definirana z:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ločimo dva primera:

i $x + 1 \geq 0 oz. x \geq -1$
Sledi: $x + x + 1 = 3$, torej $x = 1$.

ii $x + 1 < 0 oz. x < -1$
Sledi: $x - x - 1 = 3$, ni rešitve.

Rešitev: $\{1\}$.

b $|x + 1| + |x - 1| = 2$

Ločimo tri primere:

i $x < -1$
Sledi: $-x - 1 - x + 1 = 2$, torej $x = -1$. V tem primeru ni rešitve.

ii $-1 \leq x < 1$
Sledi: $x+1-x+1=2$, torej $2=2$. V tem primeru je rešitev $[-1,1)$.

iii $x \geq 1$
Sledi: $x+1+x-1=2$, torej $x=1$. V tem primeru je rešitev $\{1\}$.

Rešitev: $[-1,1]$.

9. Poišči množico rešitev naslednjih neenačb!

a $\{x; 2x < x+1 < 2x-1\}$

To je sistem dveh neenačb. Prva neenačba $2x < x+1$ ima rešitev $x < 1$, druga neenačba $x+1 < 2x-1$ pa $x > 2$. Presek teh dveh rešitev je prazen, zato sistem neenačb nima rešitve, oz. rešitev je $\emptyset$.

b $\{x; \frac{x+1}{x-1} > 0\}$

Nenenačbo množimo z $(x-1)^2$, ki je vedno pozitivno, in s tem se znak neenakosti ne spremeni. Seveda mora biti $x \neq 1$, da ne delimo z 0. Dobimo kvadratno neenačbo $(x-1)(x+1) > 0$, ki ima rešitev: $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$. Skica!

c $\{x; x-5 < 2x-3 \leq x+2\}$

To je sistem dveh neenačb. Prva neenačba $x-5 < 2x-3$ ima rešitev $x > -2$, druga neenačba $2x-3 \leq x+2$ pa $x \leq 5$. Presek teh dveh rešitev je rešitev sistema: $(-2,5]$.

10. Reši naslednje neenačbe!

a $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} > 3$

Neenačbo kvadriramo in dobimo:

$$\begin{aligned}
x + 2\sqrt{x(x+1)} + x + 1 &> 9 \\
2\sqrt{x^2+x} &> 8-2x \\
\sqrt{x^2+x} &> 4-x \\
x^2+x &> 16-8x+x^2 \\
9x &> 16 \\
x &> \frac{16}{9}
\end{aligned}$$

b $\frac{2x-3}{x-2} \leq 3$

Neenačbo množimo z $(x-2)^2$ in dobimo:

$$\begin{aligned}(2x-3)(x-2) &\leq 3(x-2)^2 \\ 2x^2-7x+6 &\leq 3x^2-12x+12 \\ x^2-5x+6 &\geq 0 \\ (x-2)(x-3) &\geq 0\end{aligned}$$

Rešitev je torej: $(-\infty, 2) \cup [3, \infty)$. Opazimo, da $x = 2$ ni rešitev.

11. Reši naslednje neenačbe z absolutno vrednostjo!

a $|x^2 + 3x - 1| < 3$

Velja: $-3 < x^2 + 3x - 1 < 3$. Rešimo dve neenačbi.

i $-3 < x^2 + 3x - 1$

$$\begin{aligned}x^2+3x-1 &> -3 \\ x^2+3x+2 &> 0 \\ (x+1)(x+2) &> 0\end{aligned}$$

Sledi: $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$. Skica!

ii $x^2 + 3x - 1 < 3$

$$\begin{aligned}x^2+3x-1 &< 3 \\ x^2+3x-4 &> 0 \\ (x-1)(x+4) &> 0\end{aligned}$$

Sledi: $x \in (-4, 1)$. Skica!

Rešitev sistema teh dveh neenačb: $(-4, -2) \cup (-1, 1)$.

b $|2|x| - 4| < 2$

V tem primeru imamo dve gnezdeni absolutni vrednosti. Najprej ločimo dva primera za notranjo absolutno vrednost.

I $x \geq 0$

Neenačba se v tem primeru glasi: $|2x - 4| < 2$. Spet ločimo dva podprimera.

I.i $2x - 4 \geq 0$ oz. $x \geq 2$

Tedaj je $2x - 4 < 2$, torej $x < 3$ in dobimo rešitev $[2, 3)$.

I.ii $2x - 4 < 0$ oz. $x < 2$

Tedaj je $-2x + 4 < 2$, torej $x > 1$ in dobimo rešitev $(1, 2)$.

Rešitev tega primera je interval $(1, 3)$.

II $x < 0$

Neenačba se v tem primeru glasi: $|-2x-4| < 2$. Spet ločimo dva podprimera.

II.i $-2x - 4 \geq 0$ oz. $x \leq -2$

Tedaj je $-2x - 4 < 2$, torej $x > -3$ in dobimo rešitev $(-3, -2]$.

II.ii $-2x - 4 < 0$ oz. $x > -2$

Tedaj je $2x + 4 < 2$, torej $x < -1$ in dobimo rešitev $(-2, -1)$.

Rešitev tega primera je interval $(-3, -1)$.

Rešitev te neenačbe je zato unija rešitev teh dveh podprimerov, torej interval $(-3, -1) \cup (1, 3)$.