Druga vaja iz matematike 1

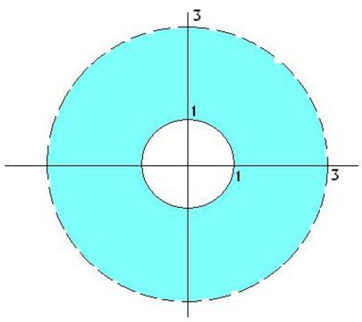
Andrej Perne

Ljubljana, 2006/07

1. Nariši podmnožice v ravnini!

   a $\{(x,y); 1 \leq x^2+y^2 < 9\}$

   $x^2+y^2=r^2$: enačba krožnice z radijem r
   $x^2+y^2<r^2$: enačba notranjosti kroga z radijem r
   $x^2+y^2>r^2$: enačba zunanjosti kroga z radijem r
   V našem primeru dobimo kolobar med krožnicama z radijema 1 in 3. Notranja krožnica je vključena, zunanja pa ne.



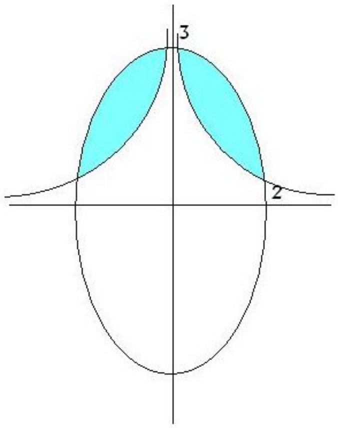
Slika 1: Slika $\{(x,y); 1 \leq x^2+y^2 < 9\}$.

   b $\{(x,y); \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \leq 1, y \geq \frac{1}{|x|}\}$

   $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$: enačba elipse z glavnima polosema a in b.
   V našem primeru dobimo unijo dveh območij znotraj elipse s polosema 2 in 3 nad hiperbolo.

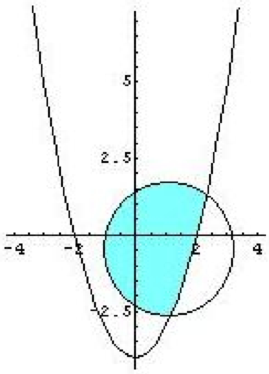
   c $\{(x,y); y \geq x^2-4, (x-1)^2+(y+1)^2 \leq 4\}$

   $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$: enačba krožnice z radijem r in središčem



Slika 2: Slika $\{(x,y); \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, y \geq \frac{1}{|x|}\}$.

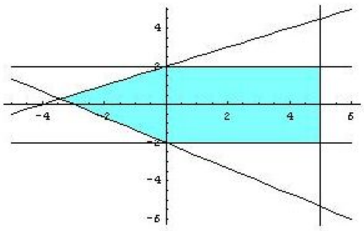
v točki (a, b)
V našem primeru dobimo območje znotraj krožnice z radijem 2 in središčem $(1, -1)$ nad parabolo.



Slika 3: Slika $\{(x,y); y \geq x^2 - 4, (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4\}$.

d $\{(x,y); x-2y+4 \geq 0, 2x+3y+6 \geq 0, y+2 \geq 0, y-2 \leq 0, x-5 \leq 0\}$

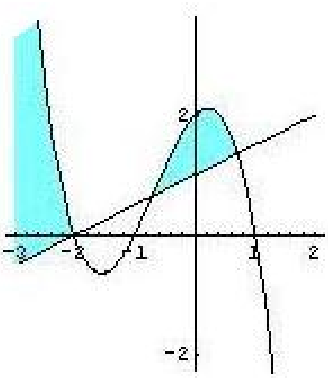
Presek petih polravnin, ki jih določajo gornje neenačbe in so omejene s premicami: $y = \frac{x}{2} + 2$, $y = -\frac{2x}{3} - 2$, $y = -2$, $y = 2$ in $x = 5$, je prikazan na sliki.



Slika 4: Slika $\{(x,y); x-2y+4 \geq 0, 2x+3y+6 \geq 0, y+2 \geq 0, y-2 \leq 0, x-5 \leq 0\}$.

e $\{(x,y); 2+x-2x^2-x^3 \geq y, y \geq \frac{x}{2}+1\}$

V našem primeru dobimo dve območji, ki ležita nad premico in pod grafom polinoma.



Slika 5: Slika $\{(x,y); 2+x-2x^2-x^3 \geq y, y \geq \frac{x}{2}+1\}$.

f $\{(x,y); |x|+|y| \leq 1\}$

Neenačbo z absolutnimi vrednostmi rešimo na vsakem kvadrantu posebej.

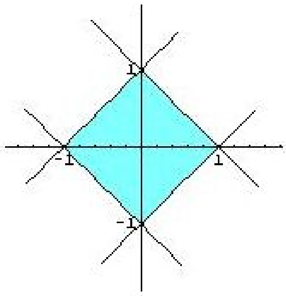
i $x \geq 0$, $y \geq 0$: $x+y \leq 1$ oz. $y \leq -x+1$

ii $x < 0$, $y \geq 0$: $-x+y \leq 1$ oz. $y \leq x+1$

iii $x \geq 0$, $y < 0$: $x-y \leq 1$ oz. $y \geq x-1$

iv $x < 0$, $y < 0$: $-x-y \leq 1$ oz. $y \geq -x-1$

Območje, ki ga dobimo, je narisano na sliki.



Slika 6: Slika $\{(x, y); |x| + |y| \leq 1\}$.

MATEMATIČNA INDUKCIJA

Princip matematične indukcije:

Če trditev velja za naravno število 1, ter če ob predpostavki, da velja za naravno število n, velja tudi za naravno število $n+1$, potem trditev velja za vsa naravna števila.

2. Z matematično indukcijo dokaži naslednje enakosti!

a $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Najprej preverimo bazo indukcije za $n = 1$; leva stran je enaka $1 \cdot 2 = 2$, desna stran pa $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2$, torej je leva stran enaka desni in enakost za $n = 1$ velja.
Nato dokažimo indukcijski korak. Za indukcijsko predpostavko vzemimo, da enakost velja za naravno število n:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Dokazujemo, da enakost velja tudi za naravno število $n + 1$:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}.$$

Torej:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1) + (n+1) \cdot (n+2) \\ = \; & \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ = \; & \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3} \end{aligned}$$

S tem je enakost dokazana za vsa naravna števila. Indukcijsko predpostavko smo uporabili na prvem koraku.

b $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

Najprej preverimo bazo indukcije za $n = 1$; leva stran je enaka 1, desna stran pa $2^1 - 1 = 1$, torej je leva stran enaka desni in enakost za $n = 1$ velja.
Nato dokažimo indukcijski korak. Za indukcijsko predpostavko vzemimo, da enakost velja za naravno število n:

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Dokazujemo, da enakost velja tudi za naravno število $n + 1$:

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Torej:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} + 2^n &= 2^n - 1 + 2^n \\ &= 2 \cdot 2^n - 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

S tem je enakost dokazana za vsa naravna števila. Indukcijsko predpostavko smo uporabili na prvem koraku.

c $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Najprej preverimo bazo indukcije za $n = 1$; leva stran je enaka $1^2 = 1$, desna stran pa $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$, torej je leva stran enaka desni in enakost za $n = 1$ velja.
Nato dokažimo indukcijski korak. Za indukcijsko predpostavko vzemimo, da enakost velja za naravno število n:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Dokazujemo, da enakost velja tudi za naravno število $n + 1$:

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Torej:

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\
&= \frac{(n+1)(2n^2+n+6(n+1))}{6}\\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
\end{aligned}$$

S tem je enakost dokazana za vsa naravna števila. Indukcijsko predpostavko smo uporabili na prvem koraku.

3. Z indukcijo pokaži, da število deli izraz!

a $9|n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$

Za $n=1$ je vrednost izraza enaka $1^3+2^3+3^3=36$, torej deljiva z 9. Indukcijsko predpostavko zapišemo v ekvivalentni obliki:

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=9k.$$

Dokazujemo, da je tudi izraz za $n+1$ oblike:

$$(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3=9k'.$$

Torej:

$$\begin{aligned}
& (n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3\\
= & (n+1)^3+(n+2)^3+n^3+9n^2+27n+27\\
= & 9k+9n^2+27n+27\\
= & 9(k+n^2+3n+3)=9k'
\end{aligned}$$

Indukcijsko predpostavko smo uporabili na prvem koraku.

b $133|11^{n+1}+12^{2n-1}$

Za $n=1$ je vrednost izraza enaka $11^2+12^1=133$, torej deljiva z 133. Indukcijsko predpostavko zapišemo v ekvivalentni obliki:

$$11^{n+1}+12^{2n-1}=133k.$$

Dokazujemo, da je tudi izraz za $n+1$ oblike:

$$11^{n+2}+12^{2n+1}=133k'.$$

Torej:

$$\begin{aligned}
11^{n+2}+12^{2n+1} &= 11\cdot 11^{n+1}+12^2\cdot 12^{2n-1}\\
&= 11\underbrace{(11^{n+1}+12^{2n-1})}_{133k}+133\cdot 12^{2n-1}\\
&= 133(11k+12^{2n-1}) = 133k'
\end{aligned}$$

Indukcijsko predpostavko smo uporabili na prvem koraku.

KOMPLEKSNA ŠTEVILA

$\mathbb{C}=\{x+\mathrm{i}y; x,y\in\mathbb{R}\}$, $\mathrm{i}^2=-1$, $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ imaginarna enota
$z=x+\mathrm{i}y$
$x=\Re z$ realna komponenta
$y=\Im z$ imaginarna komponenta
$w=u+\mathrm{i}v$

Seštevanje, odštevanje in množenje kompleksnih števil:
$z\pm w=(x\pm u)+\mathrm{i}(y\pm v)$
$z\cdot w=(xu-yv)+\mathrm{i}(xv+yu)$

Konjugirana vrednost kompleksnega števila z:
$\overline{z}=x-\mathrm{i}y$

Absolutna vrednost kompleksnega števila z:
$|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$

Obratna vrednost kompleksnega števila z:
$z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$

Deljenje kompleksnih števil:
$\frac{z}{w}=z\cdot w^{-1}$

4. Poenostavi naslednje izraze!

a $(1+2\mathrm{i})^3=1+6\mathrm{i}+12\mathrm{i}^2+8\mathrm{i}^3=1+6\mathrm{i}-12-8\mathrm{i}=-11-2\mathrm{i}$

b $\frac{5}{-3+4\mathrm{i}}=\frac{5(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}=\frac{5(-3-4\mathrm{i})}{25}=-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}\mathrm{i}$

c $\frac{2-3\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}-\frac{4+\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}=\frac{(2-3\mathrm{i})(3+\mathrm{i})-(4+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}=\frac{-4-6\mathrm{i}}{10}=-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$

d

$$\begin{aligned}\frac{y+\mathrm{i}x}{x+\mathrm{i}y}+\frac{x+\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y} &= \frac{(y+\mathrm{i}x)(x-\mathrm{i}y)+(x+\mathrm{i}y)^2}{(x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)}\\ &= \frac{x^2+2xy-y^2+\mathrm{i}x^2+2\mathrm{i}xy-\mathrm{i}y^2}{x^2+y^2}\\ &= \frac{x^2+2xy-y^2}{x^2+y^2}(1+\mathrm{i})\end{aligned}$$

5. Poenostavi in določi $\Re w$, $\Im w$, $\overline{w}$ in $|w|$!

a $w = \frac{(3+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{2-\mathrm{i}}$

$w = \frac{(3+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{(2+4\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})} = \frac{10\mathrm{i}}{5} = 2\mathrm{i}$
Sledi: $\Re w = 0$, $\Im w = 2$, $\overline{w} = -2\mathrm{i}$ in $|w| = 2$.

b $w = (1-3\mathrm{i})^2$

$w = (1-3\mathrm{i})^2 = 1 - 6\mathrm{i} + 9\mathrm{i}^2 = -8 - 6\mathrm{i}$
Sledi: $\Re w = -8$, $\Im w = -6$, $\overline{w} = -8 + 6\mathrm{i}$ in $|w| = 10$.

c $w = \frac{z-\overline{z}}{2}$

Vzamemo: $z = x + \mathrm{i}y$.
$w = \frac{x+\mathrm{i}y-x+\mathrm{i}y}{2} = \mathrm{i}y$
Sledi: $\Re w = 0$, $\Im w = y$, $\overline{w} = -\mathrm{i}y$ in $|w| = |y|$.

d $w = z\overline{z}^2$

Vzamemo: $z = x + \mathrm{i}y$.
$w = (x+\mathrm{i}y)(x-\mathrm{i}y)^2 = (x+\mathrm{i}y)(x^2-y^2-2xy\mathrm{i}) = (x^3+xy^2) + \mathrm{i}(-x^2y-y^3)$
Sledi: $\Re w = x^3 + xy^2$, $\Im w = -x^2y - y^3$ in $\overline{w} = (x^3+xy^2) - \mathrm{i}(-x^2y-y^3)$.