Osma vaja iz matematike 1

Andrej Perne

Ljubljana, 2006/07

UPORABA ODVODOV

Ekstremi funkcij:
a je stacionarna točka funkcije $f(x)$, če je $f'(a) = 0$.
Če je $f''(a) < 0$, potem je v točki a maksimum.
Če je $f''(a) > 0$, potem je v točki a minimum.
Če je $f''(a) = 0$, potem je v točki a sedlo.

Tangente in normale:
Smerni koeficient tangente na funkcijo $f(x)$ v točki (x_0, y_0): $k_t = f'(x_0)$.
Smerni koeficient normale na funkcijo $f(x)$ v točki (x_0, y_0): $k_n = -\frac{1}{k_t}$.
Enačba premice skozi točko (x_0, y_0) in smernim koeficientom k: $y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$.
Enačba premice skozi točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2): $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

1. Določi ekstreme naslednjih funkcij!

a $f(x) = 8x - 2x^2$

Izračunamo najprej prvi odvod: $f'(x) = 8 - 4x$. Stacionarne točke so rešitve enačbe $f'(x) = 0$. V našem primeru $8 - 4x = 0$, torej $x = 2$.
Drugi odvod funkcije je $f''(x) = -4$, torej $f''(2) = -4 < 0$, kar pomeni, da je v točki $x = 2$ maksimum.

b $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$

Izračunamo najprej prvi odvod: $f'(x) = 2x\mathrm{e}^{-x} - x^2\mathrm{e}^{-x} = x(2 - x)\mathrm{e}^{-x}$. Stacionarne točke so rešitve enačbe $f'(x) = 0$. V našem primeru $x(2 - x)\mathrm{e}^{-x} = 0$ oz. $x(2 - x) = 0$, torej $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$.
Drugi odvod funkcije je $f''(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} + x^2\mathrm{e}^{-x} = (x^2 - 4x + 2)\mathrm{e}^{-x}$, torej $f''(0) = 2 > 0$, kar pomeni, da je v točki

$x_1 = 0$ minimum, in $f''(2) = -2\mathrm{e}^{-2} < 0$, kar pomeni, da je v točki $x_2 = 2$ maksimum.

2. Določi točke, kjer funkcija $f(x)$ doseže največjo oz. najmanjšo vrednost na intervalu I!

a $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}, \quad I = [0, 4]$

Izračunajmo prvi odvod:

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x+1) - (x^2-3x)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

Stacionarne točke:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} &= 0 \\ (x+3)(x-1) &= 0 \end{aligned}$$

Dobimo dve rešitvi: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$. Ker prva ne leži na danem intervalu, nas zanima samo druga rešitev. Ker je v točkah levo od 1 prvi odvod negativen, v točkah desno od 1 pa pozitiven, je v tej točki lokalni minimum. Vrednost funkcije je $f(1) = -1$.
Preverimo sedaj še vrednosti v krajiščih intervala: $f(0) = 0$, $f(4) = \frac{4}{5}$. Največja vrednost je torej dosežena v točki $(4, \frac{4}{5})$, najmanjša pa v točki $(1, -1)$.

b $f(x) = 2\mathrm{tg}x - \mathrm{tg}^2 x, \quad I = [0, \frac{\pi}{2})$

Izračunajmo prvi odvod:

$$f'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 2\mathrm{tg}x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{\cos^2 x}(1 - \mathrm{tg}x)$$

Stacionarne točke:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{2}{\cos^2 x}(1-\mathrm{tg}x) &= 0 \\ 1 - \mathrm{tg}x &= 0 \\ \mathrm{tg}x &= 1 \\ x &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Rešitev gornje enačbe je sicer neskončno, a le ena leži na danem intervalu. Ker je v točkah levo od $\frac{\pi}{4}$ prvi odvod pozitiven, v točkah desno od $\frac{\pi}{4}$ pa negativen, je v tej točki lokalni maksimum. Vrednost funkcije je $f(\frac{\pi}{4}) = 1$.
Preverimo sedaj še vrednost v levem krajišču intervala: $f(0) = 0$.
Največja vrednost je torej dosežena v točki $(\frac{\pi}{4}, 1)$, najmanjša pa v točki $(0, 0)$.

3. Zapiši enačbo tangente in normale na krivuljo v dani točki T!

a $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3, \quad T(-2, 5)$

Odvajamo in dobimo: $y' = 3x^2 + 4x - 4$.
Smerni koeficient tangente: $k_t = y'(-2) = 0$.
Smerni koeficient normale: $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\infty$.
Enačba tangente:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_t \cdot (x - x_0) \\ y - 5 &= 0 \cdot (x + 2) \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Enačba normale: $x = -2$.
Tangenta je vzporedna z osjo x, normala pa z osjo y. V dani točki imamo tako stacionarno točko.

b $y = x^{\cos x}, \quad x_0 = \pi$

Krivuljo najprej zapišemo v drugačni obliki z uporabo enakosti $x = \mathrm{e}^{\ln x}$:

$$y = \mathrm{e}^{\cos x \ln x}.$$

Odvajamo in dobimo:

$$y' = \mathrm{e}^{\cos x \ln x} \cdot \left(-\sin x \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x} \right).$$

Izračunamo še vrednost funkcije v točki $x_0 = \pi$: $y_0 = y(\pi) = \frac{1}{\pi}$.
Torej $T(\pi, \frac{1}{\pi})$.
Smerni koeficient tangente: $k_t = y'(\pi) = -\frac{1}{\pi^2}$.
Enačba tangente:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_t \cdot (x - x_0) \\ y - \frac{1}{\pi} &= -\frac{1}{\pi^2}(x - \pi) \\ y &= -\frac{1}{\pi^2}x + \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Smerni koeficient normale: $k_n = -\frac{1}{k_t} = \pi^2$.
Enačba normale:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_n \cdot (x - x_0) \\ y - \frac{1}{\pi} &= \pi^2(x - \pi) \\ y &= \pi^2 x - \pi^3 + \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

c $y^2 + y - 6x = 0, \quad T(1, -3)$

Krivuljo implicitno odvajamo in dobimo:

$$\begin{aligned} 2yy' + y' - 6 &= 0 \\ y' = \frac{6}{2y+1} & \end{aligned}$$

Smerni koeficient tangente: $k_t = y'(x_0, y_0) = y'(1, -3) = -\frac{6}{5}$.
Enačba tangente:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_t \cdot (x - x_0) \\ y + 3 &= -\frac{6}{5}(x - 1) \\ y &= -\frac{6}{5}x - \frac{9}{5} \end{aligned}$$

Smerni koeficient normale: $k_n = -\frac{1}{k_t} = \frac{5}{6}$.
Enačba normale:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_n \cdot (x - x_0) \\ y + 3 &= \frac{5}{6}(x - 1) \\ y &= \frac{5}{6}x - \frac{23}{6} \end{aligned}$$

4. Poišči tisto točko na intervalu $[0, 3]$, v kateri je tangenta na krivuljo $f(x) = x^2$ vzporedna premici skozi $A(0, f(0))$, $B(3, f(3))$!

   Velja: $f(0) = 0$ in $f(3) = 9$, torej $A(0, 0)$ in $B(3, 9)$. Enačba premice skozi ti dve točki se glasi:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \\ y - 0 &= \frac{9}{3}(x - 0) \\ y &= 3x \end{aligned}$$

Ker sta premici vzporedni, mora biti smerni koeficient te premice enak smernemu koeficientu tangente:

$$\begin{aligned} y'(x_0) = k_t &= 3 \\ 2x_0 &= 3 \\ x_0 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je $f'(x) = 2x$. Torej je $y_0 = f(x_0) = \frac{9}{4}$. Iskana točka je $T(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$.

5. Poišči tisto normalo na krivuljo $y = x \ln x$, ki je vzporedna premici $2x - 2y + 3 = 0$!

   Premica $2x - 2y + 3 = 0$ se v eksplicitni obliki glasi: $y = x + \frac{3}{2}$ in ima smerni koeficient enak 1.
   Torej $k_n = 1$ in zato $k_t = -1$. Iščemo še točko.
   Odvod funkcije je: $y' = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = \ln x + 1$. Sledi

$$\begin{aligned} k_t = y'(x_0) = \ln x_0 + 1 &= -1 \\ \ln x_0 &= 2 \\ x_0 &= \mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

   Zato je $y_0 = \mathrm{e}^{-2} \ln \mathrm{e}^{-2} = -2\mathrm{e}^{-2}$ in $T(\mathrm{e}^{-2}, -2\mathrm{e}^{-2})$.
   Enačba normale se tako glasi:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k_n \cdot (x - x_0) \\ y + 2\mathrm{e}^{-2} &= 1 \cdot (x - \mathrm{e}^{-2}) \\ y &= x - 3\mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

6. Določi kot pod katerim se sekata krivulji $y = \sin x$ in $y = \sin 2x$ v izhodišču!

   Točka $T(0,0)$. Krivulji y_1 in y_2 se sekata pod istim kotom kot tangenti na ti dve krivulji v presečišču.
   Vemo, da je smerni koeficient premice enak tangensu kota, ki ga premica oklepa s pozitivnim poltrakom x-osi.
   Ker je $y_1 = \sin x$ in zato $y_1' = \cos x$, je $k_1 = y_1'(0) = 1$. Podobno, ker je $y_2 = \sin 2x$ in zato $y_2' = 2\cos 2x$, je $k_2 = y_2'(0) = 2$.
   Označimo: $k_1 = \mathrm{tg}\alpha$, $k_2 = \mathrm{tg}\beta$. Iščemo kot $\varphi = \beta - \alpha$. Iz trigonometrije poznamo formulo

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}\alpha \mathrm{tg}\beta}.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\varphi &= \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{1}{3} \\ \varphi &= \mathrm{arctg}\frac{1}{3} = 18^\circ 26' \end{aligned}$$

7. Razstavi število 36 na produkt dveh faktorjev tako, da bo vsota njunih kvadratov najmanjša!

   Pišemo $36 = x \cdot y$ in iščemo taka x in y, da bo $x^2 + y^2$ minimalno. Torej je $y = \frac{36}{x}$. Funkcijo $f(x) = x^2 + \frac{36^2}{x^2}$ odvajamo:

   $$f'(x) = 2x - \frac{2 \cdot 36^2}{x^3}$$

   Ekstremno vrednost dosežemo tam, kjer je $f'(x) = 0$.

   $$\begin{aligned} 2x - \frac{2 \cdot 36^2}{x^3} &= 0 \\ x^4 - 36^2 &= 0 \\ (x-6)(x+6)(x^2+36) &= 0 \end{aligned}$$

   Od tod sledita dve rešitvi: $x_1 = 6$ in zato $y_1 = 6$ ter $x_2 = -6$ in zato $y_2 = -6$.

8. Krogli z radijem R včrtaj valj z največjim volumnom. Določi radij r valja!

   Skica je priporočljiva. Velja zveza (Pitagorov izrek): $R^2 = r^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2$, kjer je v višina valja. Torej $r^2 = R^2 - \frac{v^2}{4}$.
   Volumen valja izračunamo po formuli $V = \pi r^2 v$. Iščemo maksimum funkcije:

   $$V(v) = \pi\left(R^2 - \frac{v^2}{4}\right)v = \pi R^2 v - \pi\frac{v^3}{4}$$

   Odvajamo:

   $$V'(v) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi v^2$$

   Ekstremno vrednost dobimo, ko je $V'(v) = 0$, torej ko je $\pi R^2 = \frac{3}{4}\pi v^2$. Sledi $v^2 = \frac{4}{3}R^2$ in zato $v = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Tedaj je $r^2 = R^2 - \frac{4}{3}R^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3}R^2$, torej je radij $r = \frac{R\sqrt{6}}{3}$.

9. Odprt stožec (brez osnovne ploskve) ima volumen $\frac{\sqrt{2\pi}}{3}$. Kolikšen je polmer osnovne ploskve, če veš, da ima od vseh takih stožcev najmanjšo površino?

   Skica je priporočljiva. Velja zveza $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{\sqrt{2\pi}}{3}$, kjer so V, r in v volumen, radij in višina stožca, torej $v = \frac{\sqrt{2}}{r^2\sqrt{\pi}}$. Površino (plašč) odprtega stožca izračunamo po formuli: $P = \pi r s$, kjer je s dolžina stranice. Iz Pitagorovega izreka dobimo zvezo: $s^2 = r^2 + v^2$. Ko vstavimo enačbo za v dobimo $s^2 = \frac{2+\pi r^6}{\pi r^4}$. Iščemo minimum funkcije:

$$P(r) = \pi r\sqrt{\frac{2+\pi r^6}{\pi r^4}} = \frac{1}{r}\sqrt{2\pi + \pi^2 r^6}$$

   Odvajamo in dobimo:

$$P'(r) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2\pi+\pi^2 r^6}} \cdot 6\pi^2 r^5 \cdot r - \sqrt{2\pi + \pi^2 r^6} \cdot 1}{r^2} = \frac{2\pi(\pi r^6 - 1)}{r^2\sqrt{2\pi + \pi^2 r^6}}$$

   Ekstrem dobimo tam, kjer je $P'(r) = 0$, torej, ko je $\pi r^6 - 1 = 0$. Razstavimo:

$$\begin{aligned} (\sqrt{\pi} r^3 - 1)(\sqrt{\pi} r^3 + 1) &= 0 \\ (\sqrt[6]{\pi} r - 1)(\sqrt[3]{\pi} r^2 + \sqrt[6]{\pi} r + 1)(\sqrt[6]{\pi} r + 1)(\sqrt[3]{\pi} r^2 - \sqrt[6]{\pi} r + 1) &= 0 \end{aligned}$$

   Rešitev je $r = \frac{1}{\sqrt[6]{\pi}}$.

10. Iz kroga z danim polmerom R izrežemo izsek in preostanek zvijemo v stožec. Izberi kot izseka tako, da ima dobljeni stožec največjo možno prostornino!

    Skica je priporočljiva. Velja zveza med R, r in v: $R^2 = v^2 + r^2$, kjer sta r in v radij in višina stožca. Sledi: $v = \sqrt{R^2 - r^2}$. Velja še zveza med R in α: $(2\pi - \alpha)R = 2\pi r$, kjer je α kot izseka. Sledi: $r = \frac{(2\pi-\alpha)R}{2\pi}$. Volumen stožca izračunamo po formuli $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$, ki jo zapišemo kot funkcijo kota α:

$$V(\alpha) = \frac{R^3}{24\pi^3}(2\pi - \alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}.$$

Odvajamo:

$$
\begin{aligned}
V'(\alpha) &= \frac{R^3}{24\pi^3}\Bigg(-2(2\pi-\alpha)\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2} \\
&\qquad +(2\pi-\alpha)^2\frac{1}{2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}(4\pi-2\alpha)\Bigg) \\
&= \frac{R^3(2\pi-\alpha)}{24\pi^3}\cdot\frac{-8\pi\alpha+2\alpha^2+4\pi^2-4\pi\alpha+\alpha^2}{\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}} \\
&= \frac{R^3(2\pi-\alpha)(4\pi^2-12\pi\alpha+3\alpha^2)}{24\pi^3\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2}}
\end{aligned}
$$

Odvod je enak 0, ko je $\alpha_1 = 2\pi$ in ko je $\alpha_{2,3} = \frac{12\pi\pm\sqrt{144\pi^2-48\pi^2}}{6} = 2\pi \pm \frac{2\pi\sqrt{6}}{3}$.
Volumen je torej maksimalen pri $\alpha = 2\pi(1-\frac{\sqrt{6}}{3})$.

11. S pomočjo diferenciala izračunaj približno vrednost funkcije $f(x) = \sqrt{3x^2+3x+4}$ pri $a = \frac{8}{100}$!

Vrednost funkcije v neki točki a, če poznamo vrednost v neki bližnji točki x_0, izračunamo po formuli:

$$f(a) = f(x_0) + f'(x_0)(a - x_0).$$

Potrebujemo odvod:

$$f'(x) = \frac{6x+3}{2\sqrt{3x^2+3x+4}}.$$

Vrednost funkcije in odvoda preprosto izračunamo v točki $x_0 = 0$, ki je blizu $a = \frac{8}{100}$: $f(0) = 2$ in $f'(0) = \frac{3}{4}$. Torej:

$$f\left(\frac{8}{100}\right) = 2 + \frac{3}{4}\cdot\frac{8}{100} = 2.06.$$