# Četrta vaja iz matematike 1

Andrej Perne

Ljubljana, 2006/07

## ZAPOREDJA

Zaporedje je predpis, ki vsakemu $n \in \mathbb{N}$ priredi $a_n \in \mathbb{R}$.

Monotonost zaporedij:

Zaporedje $\{a_n\}$ je naraščajoče, če je $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak $n$.
Zaporedje $\{a_n\}$ je strogo naraščajoče, če je $a_{n+1} > a_n$ za vsak $n$.
Zaporedje $\{a_n\}$ je padajoče, če je $a_{n+1} \leq a_n$ za vsak $n$.
Zaporedje $\{a_n\}$ je strogo padajoče, če je $a_{n+1} < a_n$ za vsak $n$.

Kriterija za monotonost:

i $a_{n+1} - a_n \geq 0 \Rightarrow$ zaporedje je naraščajoče

ii $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow$ zaporedje je naraščajoče

Omejenost zaporedij:

Zgornja meja zaporedja $\{a_n\}$ je vsako število $M$, da velja $a_n \leq M$ za vsak $n$.
Spodnja meja zaporedja $\{a_n\}$ je vsako število $m$, da velja $a_n \geq m$ za vsak $n$.
Supremum ali natančna zgornja meja je najmanjša izmed vseh zgornjih mej.
Infimum ali natančna spodnja meja je največja izmed vseh spodnjih mej.
Supremum in infimum vedno obstajata.
Zaporedje $\{a_n\}$ je navzgor omejeno, če ima končno zgornjo mejo.
Zaporedje $\{a_n\}$ je navzdol omejeno, če ima končno spodnjo mejo.
Zaporedje $\{a_n\}$ je omejeno, če je navzgor in navzdol omejeno.
Maksimum je največji člen zaporedja $\{a_n\}$, minimum pa najmanjši člen zaporedja $\{a_n\}$.
Maksimum in minimum ne obstajata vedno. Če maksimum oz. minimum obstaja, potem je enak supremumu oz. infimumu.
Supremum in infimum nista nujno člena zaporedja, maksimum in minimum pa sta.

Stekališča in limite:

Število $a$ je stekališče zaporedja $\{a_n\}$, če je v vsaki $\varepsilon$-okolici števila $a$ neskončno členov tega zaporedja.
Število $a$ je limita zaporedja $\{a_n\}$, če je v vsaki $\varepsilon$-okolici števila $a$ neskončno členov tega zaporedja, izven te okolice pa le končno mnogo.
Limito označimo z $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.
Zaporedje, ki ima limito se imenuje konvergentno, sicer pa divergentno.
Vsaka limita je stekališče, obratno pa ni nujno res. Stekališče je limita, ko je edino stekališče. Vsako stekališče je limita nekega podzaporedja.
Vsako omejeno zaporedje ima stekališče. Omejeno zaporedje z enim samim stekališčem je konvergentno.
Zaporedje je konvergentno, če je naraščajoče in navzgor omejeno.
Zaporedje je konvergentno, če je padajoče in navzdol omejeno.

1. Določi monotonost zaporedij!

**a** $a_n = \frac{1}{n+1}$

Uporabimo drugi kriterij za monotonost:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} < 1.$$

Zaporedje je strogo padajoče.

**b** $a_n = n^2$

Uporabimo prvi kriterij za monotonost:

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 > 0.$$

Zaporedje je strogo naraščajoče.

**c** $a_n = \frac{3^n}{n!}$

Uporabimo drugi kriterij za monotonost:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \frac{3 \cdot 3^n \cdot n!}{(n+1) \cdot n! \cdot 3^n} = \frac{3}{n+1} \leq 1, \quad n \geq 2.$$

Zaporedje je padajoče za $n \geq 2$.
Opomba: $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ in velja $(n+1)! = (n+1)n!$.

**d** $a_n = \sin(n\pi)$

Zaporedje je konstantno enako 0.

2. Določi največji in najmanjši člen zaporedja (če obstaja) ter supremum in infimum!

**a** $a_n = \frac{n}{n+1}$

Najprej preverimo monotonost:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1.$$

Ker je to strogo naraščajoče zaporedje, je prvi člen minimalen:

$$\min_n a_n = a_1 = \frac{1}{2} = \inf_n a_n.$$

Infimum je seveda enak minimumu. Maksimalen člen ne obstaja. Supremum pa je enak $\sup_n a_n = 1$, saj so vsi členi zaporedja strogo manjši od 1, vendar se poljubno približajo.

**b** $a_n = \frac{2^n}{n!}$

Najprej preverimo monotonost:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 2^n} = \frac{2}{n+1} \leq 1.$$

Ker je to padajoče zaporedje, je prvi člen maksimalen:

$$\max_n a_n = a_1 = 2 = \sup_n a_n.$$

Supremum je seveda enak maksimumu. Minimalen člen ne obstaja. Infimum pa je enak $\inf_n a_n = 0$, saj eksponentna funkcija narašča počasneje kot fakulteta.

**c** $a_n = (1 - \frac{1}{n})(-1)^n$

To je primer alternirajočega zaporedja. Prvih nekaj členov se glasi: $0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$.
V tem primeru zaporedje razdelimo na dve podzaporedji: v prvem podzaporedju so členi z lihim indeksom, v drugem pa členi s sodim indeksom. Opazimo, da je prvo podzaporedje padajoče in pada od 0 proti $-1$ ($a_{2k-1} \to -1$), drugo podzaporedje pa je naraščajoče in narašča od $\frac{1}{2}$ proti 1 ($a_{2k} \to 1$). 1 in $-1$ nista člena zaporedja, zato maksimum in minimum ne obstajata, sta pa ti dve števili supremum in infimum: $\sup_n a_n = 1$, $\inf_n a_n = -1$.

3. Zapiši splošni člen zaporedja!

**a** $2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

$\Rightarrow \qquad a_n = n + 1$

**b** $1, -4, 9, -16, 25, \ldots$

$\Rightarrow \qquad a_n = (-1)^{n+1} n^2$

Opomba: Potenca $n+1$ je zato, ker se alternirajoče zaporedje začne s pozitivnim členom.

4. Določi stekališča zaporedja! Ali je zaporedje konvergentno?

**a** $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

Zaporedje ima eno samo stekališče: 1, saj se vsi členi približujejo k 1, in je torej konvergentno.

**b** $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

Prvih nekaj členov zaporedja se glasi: $0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \ldots$. Členi se ponavljajo, ker je funkcija sin periodična. Stekališča so torej: $0, \frac{\sqrt{3}}{2}$ in $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, zaporedje pa ni konvergentno (je divergentno).

**c** $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots$

Zaporedje razdelimo na dve podzaporedji: členi z lihimi indeksi se približujejo 0, členi s sodimi indeksi pa k 1, stekališči sta dve: 0 in 1, zato zaporedje ni konvergentno.

5. Izračunaj naslednje limite!

**a**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^2 + 9n - 6}{2n^3 + 3n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8}{n} + \frac{9}{n^2} - \frac{6}{n^3}}{2 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = 0$$

Opomba: Take limite rešujemo tako, da delimo števec in imenovalec z najvišjo potenco, torej v našem primeru z $n^3$. Velja: $\frac{1}{n^r} \to 0$, ko gre $n \to \infty$ za vsak $r \geq 1$.

**b**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2 + 2}{3n^2 + 11n - 2} = \frac{7}{3}$$

Opomba: Če sta stopnji polinomov v števcu in imenovalcu enaki, je limita enaka kvocientu vodilnih koeficientov.

**c**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

**d**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0\end{aligned}$$

Opomba: Take limite rešujemo tako, da izraz v števcu in imenovalcu pomnožimo s podobnim izrazom, le da je namesto minusa plus.

**e**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}(n+1-n)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1}}{\sqrt{1}}=2\end{aligned}$$

**f**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}=3$$

Opomba: $a^n\to 0$, ko gre $n\to\infty$ za $a<1$. V našem primeru je $a=\frac{2}{3}<1$.

6. S pomočjo limite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ izračunaj naslednje limite!

**a**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+3}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^n\\ &= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{2m-3}\\ &= \left(\underbrace{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}_{=\mathrm{e}}\right)^2\cdot\underbrace{\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-3}}_{=1}\\ &= \mathrm{e}^2\end{aligned}$$

V drugi vrstici smo napravili substitucijo $\frac{1}{m} = \frac{2}{n+3}$ oz. $m = \frac{n+3}{2}$, torej $n = 2m - 3$. Ko gre $n \to \infty$, gre tudi $m \to \infty$.
Dodatno smo v tretji vrstici upoštevali, da je kvadratna funkcija zvezna in zato lahko zamenjamo vrstni red limitiranja in kvadriranja.

**b**

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (n+3)(\ln(n+1) - \ln n) &= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+3} \\
&= \ln \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+3} \\
&= \ln \mathrm{e} = 1
\end{aligned}$$

V prvi vrstici smo upoštevali lastnosti logaritemske funkcije: $\ln a + \ln b = \ln ab$, $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ in $r \ln a = \ln a^r$. Poleg tega smo v drugi vrstici upoštevali še, da lahko zamenjamo vrstni red limitiranja in logaritmiranja, ker je ln zvezna funkcija.

7. Ugotovi od katerega člena dalje se vsi členi zaporedja $a_n$ razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon$!

**a** $a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$

Rešiti je potrebno neenačbo $|a_n - a| < \varepsilon$, kjer je $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Limita je očitno enaka $a = 1$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{n^2+n}{n^2+1} - 1\right| &< \frac{1}{10} \\
\left|\frac{n^2+n-n^2-1}{n^2+1}\right| &< \frac{1}{10} \\
\frac{n-1}{n^2+1} &< \frac{1}{10} \\
n^2+1 &> 10n - 10 \\
n^2 - 10n + 11 &> 0
\end{aligned}$$

Enačba $n^2 - 10n + 11 = 0$ ima dve rešitvi $n_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-44}}{2} = 5 \pm \sqrt{14}$, kjer je $n_1 = 5 + \sqrt{14} \doteq 8.74$ in $n_2 = 5 - \sqrt{14} \doteq 1.25$. Gornja neenakost velja za vse $n > n_1$ in $n < n_2$, torej so od devetega člena dalje vsi členi zaporedja v tej okolici.

**b** $a_n = \frac{5^n - 1}{5^n}$, $\varepsilon = 25^{-25}$

Rešiti je potrebno neenačbo $|a_n - a| < \varepsilon$, kjer je $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Limita je očitno enaka $a = 1$.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{5^n - 1}{5^n} - 1\right| &< 25^{-25} \\
\left|\frac{5^n - 1 - 5^n}{5^n}\right| &< 5^{-50} \\
\frac{1}{5^n} &< \frac{1}{5^{50}} \\
5^n &> 5^{50} \\
n &> 50
\end{aligned}
$$

Torej so od enainpetdesetega člena dalje vsi členi zaporedja v tej okolici.

8. Dokaži, da je rekurzivno podano zaporedje konvergentno in izračunaj limito!

**a** $a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n}{3} - 2$

Zapišimo nekaj členov zaporedja: $0, -2, -\frac{8}{3}, \ldots$.
Prvi členi padajo, zato je za dokaz konvergence dovolj dokazati, da je zaporedje padajoče in navzdol omejeno.

**i** Pokažimo najprej omejenost navzdol.
Z indukcijo bomo pokazali, da je $a_n > -3$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ je $a_1 = 0 > -3$, torej baza indukcije drži. Za dokaz indukcijskega koraka vzamemo za indukcijsko predpostavko, da je $a_n > -3$ in dokazujemo, da je potem tudi $a_{n+1} > -3$. Torej:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{3} - 2 > \frac{-3}{3} - 2 = -3.$$

**ii** Sedaj pokažimo še padanje:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{3} - 2 - a_n = -\frac{2a_n}{3} - 2 < -\frac{2 \cdot (-3)}{3} - 2 = 0.$$

Ker je zaporedje padajoče in navzdol omejeno, je konvergentno. Izračunajmo še limito. V ta namen označimo: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_n}{3} - 2 \\
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{3} - 2\right) \\
a &= \frac{a}{3} - 2 \\
a &= -3
\end{aligned}
$$

Opomba: $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$, ker se zaporedji $a_{n+1}$ in $a_n$ razlikujeta samo v prvem členu, kar pa ne vpliva na limito.

**b** $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$

Zapišimo nekaj členov zaporedja: $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \ldots$.
Prvi členi naraščajo, zato je za dokaz konvergence dovolj dokazati, da je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno.

**i** Pokažimo najprej omejenost navzgor.
Z indukcijo bomo pokazali, da je $a_n < 2$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ je $a_1 = 1 < 2$, torej baza indukcije drži. Za dokaz indukcijskega koraka vzamemo za indukcijsko predpostavko, da je $a_n < 2$ in dokazujemo, da je potem tudi $a_{n+1} < 2$. Torej:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 < \frac{2}{2} + 1 = 2.$$

**ii** Sedaj pokažimo še naraščanje:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + 1 - a_n = -\frac{a_n}{2} + 1 > -\frac{2}{2} + 1 = 0.$$

Ker je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, je konvergentno. Izračunajmo še limito. V ta namen označimo: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + 1 \\
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{2} + 1\right) \\
a &= \frac{a}{2} + 1 \\
a &= 2
\end{aligned}$$