Peta vaja iz matematike 1

Andrej Perne

Ljubljana, 2006/07

1. Dokaži, da je rekurzivno podano zaporedje $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n^2 + 1$ konvergentno in izračunaj limito!

   Zapišimo nekaj členov zaporedja: $1, \frac{6}{5}, \frac{161}{125}, \ldots$. Očitno velja: $a_n > 0$. Prvi členi naraščajo, zato je za dokaz konvergence dovolj dokazati, da je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno.

   i Pokažimo najprej omejenost navzgor.
   Z indukcijo bomo pokazali, da je $a_n < 2$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ je $a_1 = 1 < 2$, torej baza indukcije drži. Za dokaz indukcijskega koraka vzamemo za indukcijsko predpostavko, da je $a_n < 2$, in dokazujemo, da je potem tudi $a_{n+1} < 2$. Torej:

   $$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n^2 + 1 < \frac{1}{5}2^2 + 1 = \frac{9}{5} < 2.$$

   ii Sedaj pokažimo še naraščanje.
   Tudi tu si bomo pomagali z indukcijo, da dokažemo $a_{n+1} - a_n > 0$. Za $n = 1$ je $a_2 - a_1 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5} > 0$. Za indukcijski korak vzamemo indukcijsko predpostavko $a_n - a_{n-1} > 0$ in dokazujemo $a_{n+1} - a_n > 0$. Torej:

   $$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{5}a_n^2 + 1 - \frac{1}{5}a_{n-1}^2 - 1 = \frac{1}{5}(a_n^2 - a_{n-1}^2) \\ &= \frac{1}{5}(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1}) \end{aligned}$$

   Ker je $a_n + a_{n-1} > 0$, je $a_{n+1} - a_n > 0$ natanko tedaj, ko je $a_n - a_{n-1} > 0$. Sledi, da je zaporedje naraščajoče.

   Ker je zaporedje naraščajoče in navzgor omejeno, je konvergentno.

Izračunajmo še limito. V ta namen označimo: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{5}a_n^2 + 1 \\ \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}a_n^2 + 1\right) \\ a &= \frac{1}{5}a^2 + 1 \end{aligned}$$

Torej dobimo kvadratno enačbo $a^2 - 5a + 5 = 0$, ki ima dve rešitvi: $a_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ in $a_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. Prva rešitev ni limita, ker je večja od 2, zato je $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

ŠTEVILSKE VRSTE

Številsko vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ seštejemo tako, da najprej izračunamo N-to delno vsoto vrste: $s_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$. To nam da zaporedje delnih vsot, ko gre $N \to \infty$. Če zaporedje delnih vsot konvergira, limito označimo z $s = \lim_{N\to\infty} s_N$. Vsota vrste je tedaj enaka limiti delnih vsot: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.
Pravimo, da vrsta konvergira, če konvergira zaporedje delnih vsot, sicer vrsta divergira.

Geometrijska vrsta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Kriteriji za konvergenco številskih vrst s pozitivnimi členi.

I Kvocientni kriterij:
Dana je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Izračunamo $q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

i Če je $q < 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
ii Če je $q > 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
iii Če je $q = 1$, potem kriterij odpove.

II Korenski kriterij:
Dana je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Izračunamo $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

i Če je $q < 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
ii Če je $q > 1$, potem vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
iii Če je $q = 1$, potem kriterij odpove.

III Primerjalni kriterij:

Naj bo $0 \leq a_n \leq b_n$ za vsak $n \geq n_0$.

i Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, potem konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, potem divergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Kriterij za konvergenco alternirajočih vrst.

Alternirajoča vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergira, če zaporedje a_n od nekje naprej monotono pada proti 0.

2. Seštej vrsto tako, da izračunaš limito delnih vsot!

a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Splošni člen vrste je $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, ki ga zapišemo na drug način s parcialnimi ulomki.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{(A+B)n + A}{n(n+1)}$$

Primerjamo števca in dobimo sistem dveh enačb za dve neznanki: $A + B = 0$, $A = 1$, od koder sledi, da je $B = -1$. Torej je $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Sedaj izračunamo N-to delno vsoto vrste.

$$\begin{aligned} s_N &= a_1 + a_2 + \cdots + a_N \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \end{aligned}$$

Opazimo, da se vsi vmesni členi pokrajšajo. Vsota vrste je sedaj enaka limiti zaporedja delnih vsot:

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty}\left(1 - \frac{1}{N+1}\right) = 1.$$

Torej je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

Splošni člen vrste je $a_n = \frac{1}{4n^2-1}$, ki ga kot prej zapišemo s parcialnimi ulomki.

$$\begin{aligned} \frac{1}{4n^2-1} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1} \\ &= \frac{2(A+B)n + (A-B)}{4n^2-1} \end{aligned}$$

Primerjava števcev nam da sistem: $A + B = 0$, $A - B = 1$, od koder sledi, da je $A = \frac{1}{2}$ in $B = -\frac{1}{2}$. Torej je $a_n = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$. Sedaj izračunamo N-to delno vsoto vrste.

$$\begin{aligned} s_N &= a_1 + a_2 + \cdots + a_N \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4N-2} - \frac{1}{4N+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4N+2} \end{aligned}$$

Opazimo, da se tudi tu vsi vmesni členi pokrajšajo. Vsota vrste je sedaj enaka limiti zaporedja delnih vsot:

$$s = \lim_{N\to\infty} s_N = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4N+2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Torej je $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

3. Izračunaj vsoto geometrijske vrste!

a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{37}{100^n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{37}{100^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{37}{100} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} = \frac{\frac{37}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{37}{99}$$

Opazimo: $a = \frac{37}{100}$, $q = \frac{1}{100}$, $|q| < 1$.

b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4$$

Opazimo: $a = 3$, $q = \frac{1}{4}$, $|q| < 1$.

4. Z uporabo geometrijske vrste zapiši decimalno število $0,232323\ldots$ v obliki ulomka!

$$\begin{aligned} 0,232323\ldots &= 23 \cdot \frac{1}{100} + 23 \cdot \frac{1}{10000} + 23 \cdot \frac{1}{1000000} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 23 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{23}{100} \left(\frac{1}{100}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{99} \end{aligned}$$

Opazimo: $a = \frac{23}{100}$, $q = \frac{1}{100}$, $|q| < 1$.

5. S pomočjo kvocientnega kriterija določi konvergenco vrste!

a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Splošni člen: $a_n = \frac{1}{n!}$.

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Vrsta je konvergentna.

b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!}$

Splošni člen: $a_n = \frac{(3n)!}{(2n)!}$.

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)!(2n)!}{(3n)!(2n+2)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!(2n)!}{(3n)!(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{27n^3+54n^2+33n+6}{4n^2+6n+2} = \infty > 1 \end{aligned}$$

Vrsta je divergentna.

c $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1}$

Splošni člen: $a_n = \frac{2n}{n+1}$.

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)^2}{2n(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} = 1$$

Kvocientni kriterij v tem primeru odpove.

6. S pomočjo korenskega kriterija določi konvergenco vrste!

a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$

Splošni člen: $a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}$.

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \lim_{m\to\infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{2m-1} = \mathrm{e}^{-2} < 1 \end{aligned}$$

Vrsta je konvergentna. V zadnji vrstici smo napravili substitucijo $\frac{1}{m} = \frac{2}{n+1}$, torej $m = \frac{n+1}{2}$, oziroma $n = 2m - 1$. Velja: ko gre $n \to \infty$, gre tudi $m \to \infty$. Upoštevamo tudi, da je $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}$.

b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{n \cdot 5^n}$

Splošni člen: $a_n = \frac{3^{2n+1}}{n \cdot 5^n}$.

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{2n+1}}{n \cdot 5^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3 \cdot 9^n}{n \cdot 5^n}} = \frac{9}{5} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n}} \\ &= \frac{9}{5} \cdot \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{9}{5} > 1 \end{aligned}$$

Vrsta je divergentna. Pri tem smo upoštevali, da velja: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ in $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$, $c =$ konst.

7. S pomočjo minorante ali majorante določi konvergenco vrste!

a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$

To vrsto primerjamo s harmonično vrsto: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, za katero vemo, da je divergentna. Ker je $\log n < n$, je $\frac{1}{n} < \frac{1}{\log n}$ in zato $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$. Po primerjalnem kriteriju je zato tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ divergentna.

b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$

Za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ vemo, da je konvergentna, če je $\alpha > 1$, oz. divergentna, če je $\alpha \leq 1$. Ker je $n(n^2+1) = n^3 + n > n^3$, je $\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \frac{1}{n^{3/2}}$ in zato $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. Ker je $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergentna, zato je po primerjalnem kriteriju konvergentna tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$.

8. Določi konvergenco alternirajoče vrste!

a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$

Preveriti moramo, da je zaporedje $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ padajoče ter da ima limito 0.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2} < 1$$

Torej je padajoče. Očitno je $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$.
Vrsta konvergira.

b $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$

Preveriti moramo, da je zaporedje $a_n = \frac{1}{2^n}$ padajoče ter da ima limito 0.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1$$

Torej je padajoče. Očitno je $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.
Vrsta konvergira.