# MATEMATIKA II
## odgovori na ustna vprašanja

**Šolsko leto** 2007 / 2008
**Izvajalec** Gregor Dolinar

**Avtor dokumenta** /

**UREJANJE DOKUMENTA**

**VERZIJA** 01 **REVIZIJA** 01
**DATUM** 21. 2. 2009

**ZADNJI POPRAVLJAL** /
**PREGLEDAL** /

**OPOMBE**

**POPRAVKI**

**Matematika 2 – ustna vprašanja**

Determinanta, poddeterminanta

Lastnosti determinante

Cramerjevo pravilo

Računanje z vektorji, kot med vektorji

Skalarni produkt vektorjev

Vektorski produkt vektorjev

Mešani produkt vektorjev

Cauchy-Schwarzova neenakost

Paralelogramska enačba

Enačba ravnine, enačba premice

Razdalja med točkama, razdalja med točko in premico

Razdalja med točko in ravnino, razdalja med premicama, razdalja med premico in ravnino

Računanje z matrikami

Rang matrike

Inverzna matrika (definicija, lastnosti, izračun)

Posebne vrste matrik (simetrična …)

Sistemi linearnih enačb - osnovni izrek

Gaussova metoda za reševanje sistema linearnih enačb

Vektorski prostor

Baza vektorskega prostora

Linearna neodvisnost vektorjev

Linearna preslikava

Lastne vrednosti, lastni vektorji matrike

Lastne vrednosti hermitskih, poševno hermitskih, unitarnih matrik

Funkcijska vrsta (definicija, definicijsko območje, konvergenca)

Potenčna vrsta (definicija, konvergenca)

Odvajanje in integriranje potenčnih vrst

Taylorjeva vrsta funkcije $f$

Taylorjeva vrsta funkcij: $e^x, \sin x, \cos x, \log(1+x)$

Binomska vrsta, binomski koeficienti

Fouriejeva vrsta (definicija, konvergenca)

Fourierova vrsta s poljubno periodo

Sinusna Fouriejeva vrsta, kosinusna Fouriejeva vrsta

Funkcija dveh spremenljivk (definicija, zveznost, limita, graf)

Odvod funkcije več spremenljivk

Posredno odvajanje: $z = z(u, v)$

$u = u(x, y)$

$v = v(x, y)$

$z_x, z_y$

Višji parcialni odvodi

Taylorjeva vrsta funkcije dveh spremenljivk

Izrek o implicitni funkciji

Ekstrem funkcije dveh spremenljivk

Hessejeva matrika

Vezani ekstrem funkcije dveh spremenljivk

Diferencialna enačba (definicija, začetni problem, robni problem)

Diferencialna enačba z ločljivimi spremenljivkami

Linearna diferencialna enačba 1. reda (homogena, nehomogena)

Bernoullijeva diferencialna enačba

Eksaktna diferencialna enačba

Vpeljava parametra v diferencialno enačbo: $F(x, y') = 0$

$x = \varphi(y')$

Ortogonalne trajektorije

Eksistenca in enoličnost rešitve diferencialne enačbe $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$

Splošna rešitev linearne diferencialne enačbe drugega reda

Linearna diferencialna enačba drugega reda homogena s konstantnimi koeficienti

Determinanta Wronskega (linearna odvisnost funkcij)

Linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti, 2. reda, nehomogena

Nehomogena linearna diferencialna enačba 2. reda

Eulerjeva diferencialna enačba 2. reda

Reševanje nehomogene linearne diferencialne enačbe s konstantnimi koeficienti višjega reda s pomočjo nastavka

Sistemi diferencialnih enačb

## ⇒ DETERMINANTA, PODDETERMINANTA

DEFINICIJA: Determinanta je predpis, ki kvadratni shemi $n \times n$ števil priredi število ($\mathbb{R}$). Predpis podamo induktivno:

$n=1 \Rightarrow |a| = a$

$$n=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

⋮

DEFINICIJA: Determinanto, ki jo dobimo tako, da v prvotni determinanti prečrtamo i-to vrstico in j-ti stolpec, imenujemo poddeterminanta, ki pripada elementu $a_{ij}$

DEFINICIJA: Produkt $(-1)^{i+j}$ in poddeterminante, ki pripada elementu $a_{ij}$, imenujemo KOFAKTOR elementa $a_{ij}$.

## ⇒ LASTNOSTI DETERMINANTE

1. Vrednost determinante se ne spremeni, če zamenjamo vlogo vrstice in stolpca.

2. Če zamenjamo v determinanti poljubni vrstici, se determinanti spremeni predznak (enako velja za stolpce)

3. Determinanto pomnožimo s skalarjem tako, da pomnožimo s tem številom vsak element izbrane vrstice [enako velja za stolpce]. Velja tudi obratno - lahko izpostavimo iz vrstice.

4. Če sta v determinanti dve vrsti enaki, potem je vrednost determinante enaka 0. (enako velja za stolpce).

5. Vrednost determinante se ne spremeni, če katerikoli vrstici prištejemo večkratnik katerekoli druge vrstice. Enako velja za stolpce.
Na ta način lahko v determinanti „pridelamo" ničle.

⇒ CRAMERJEVO PRAVILO
- uporabljamo ga za reševanje sistema linearnih enačb.
- Linearne enačbe

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + \dots a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + \dots a_{nn}x_n = b_n$$

zapišemo v determinanto

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Rešitev je dana z enačbami

$x_j = \frac{D_j}{D}$ ; $j=1,\dots n$ kjer je $D_j$ determinanta, ki jo dobimo, če j-ti stolpec determinante sistema zamenjamo s stolpcem na desni.

## ⇒ RAČUNANJE Z VEKTORJI, KOT MED VEKTORJI

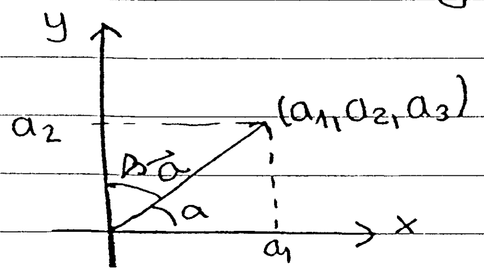
Vektor je urejena n-terica števil, ki jo običajno zapišemo v obliki stolpca

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

ali $\vec{a} = (a_1, a_2 \ldots a_n)$

Števila $a_1 \ldots a_n$ imenujemo koordinate ali komponente vektorja $\vec{a}$.

Dolžina vektorja $\vec{a} = |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$




$x: \cos\alpha = \dfrac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ $\quad \alpha(\vec{a}, x)$

$y: \cos\beta = \dfrac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ $\quad \beta(\vec{a}, y)$

$z: \cos\gamma = \dfrac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ $\quad \gamma(\vec{a}, z)$

* SEŠTEVANJE

  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

* ODŠTEVANJE

  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

* MNOŽENJE S SKALARJEM

  $\alpha \cdot \vec{a} = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha a_3)$

VELJA:

- ASOCIATIVNOST: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- KOMUTATIVNOST: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- DISTRIBUTIVNOST: $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$
- $\vec{a} = 1 \cdot \vec{a}$

DEFINICIJA: Kot $\varphi$ med neničelnima vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je dan z enačbo

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

⇒ SKALARNI PRODUKT VEKTORJEV

DEFINICIJA: Skalarni produkt vektorjev je operacija, ki vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ priredi skalar: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 \cdot b_1 + \dots + a_n \cdot b_n \in \mathbb{R}$

LASTNOSTI:

1. KOMUTATIVNOST: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
2. DISTRIBUTIVNOST GLEDE NA SEŠTEVANJE VEKTORJEV: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
3. IZPOSTAVLJANJE SKALARJEV:
   $\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$ ; $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
4. POZITIVNA DEFINITNOST: za vsak vektor $\vec{a}$ je $\vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0$ ; če je $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0$, je $\vec{a} = 0$.
   Pozitivna definitnost skalarnega produkta omogoča, da definiramo dolžino vektorja.
5. CAUCHY - SCHWARZOVA NEENAKOST
   $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$
6. TRIKOTNIŠKA NEENAKOST
   $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$
7. PARALELOGRAMSKA IDENTITETA
   $|\vec{a}-\vec{b}|^2 + |\vec{a}+\vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$

## ⇒ VEKTORSKI PRODUKT VEKTORJEV

DEFINICIJA: Vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je vektor, ki je pravokoten na vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, smer je točno dobčena s pravilom desnega vijaka. Dolžina vektorskega produkta je $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin\varphi|$.

Vektorski produkt zapišemo:

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}$$
$$\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

1. $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$

2. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$

3. $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

LASTNOSTI:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ ANTIKOMUTATIVNOST
2. $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ ; $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times k\vec{a} = 0$ ; za $k=1 \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$
3. $(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b})$
4. $\vec{a} \times (\vec{b} * \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

## ⇒ MEŠANI PRODUKT VEKTORJEV

DEFINICIJA: Mešani produkt vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}\times\vec{c}$:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Mešani produkt treh vektorjev je skalar in je enak

$$(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

* $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$

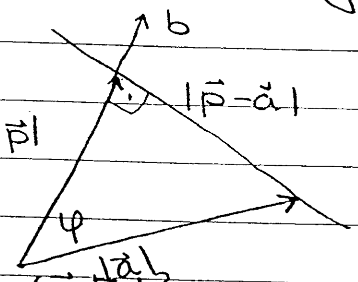
(če zamenjaš dva vektorja, se spremeni predznak)

## ⇒ CAUCHY-SCHWARZOVA NEENAKOST

IZREK: Za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ velja:

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

DOKAZ: Naj bo $\vec{p}$ projekcija vektorja $\vec{a}$ na $\vec{b}$. Potem iz enačbe $|\vec{p}|^2 + |\vec{a}-\vec{p}|^2 = |\vec{a}|^2$ dobimo




$$0 \leq |\vec{a}-\vec{p}|^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{p}|^2 = |\vec{a}|^2 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{b}|^2}$$ in od tod:

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$$

## ⇒ PARALELOGRAMSKA ENAČBA

## ⇒ ENAČBA RAVNINE, ENAČBA PREMICE

Ravnina v prostoru je določena s točko $A(a_1, a_2, a_3)$, ki leži v njej, in z normalnim vektorjem $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$, ki je pravokoten nanjo.

Enačba ravnine v vektorski obliki:

$$(\vec{r} - \vec{r}_A) \cdot \vec{n} = 0$$

SEGMENTNA OBL.

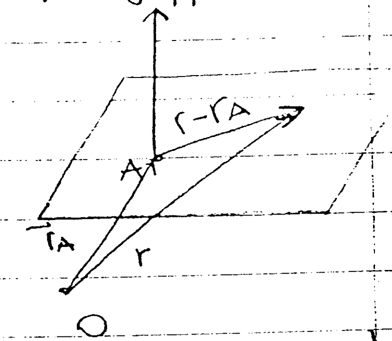
$$\frac{x}{e} + \frac{y}{f} + \frac{z}{g} = 1$$

po komponentah:

$$n_1(x - a_1) + n_2(y - a_2) + n_3(z - a_3) = 0;$$

splošna oblika:

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = d \; ; \; d = \vec{n} \cdot \vec{r}_A$$




$d = 0 \Rightarrow$ ravnina gre skozi k.o. izhodišče

$c = 0 \Rightarrow$ ravnina vzporedna z osjo $z$;

PREMICA v prostoru je določena s točko $A(a_1, a_2, a_3)$ in s smernim vektorjem $\vec{e}$. Točka $T(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ s krajevnim vektorjem $\vec{r}$ leži na tej premici, če je vektor $\vec{r} - \vec{r}_A$ vzporeden vektorju $\vec{e}$.

Enačba premice v parametrični obliki:

$$\vec{r} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{e}$$

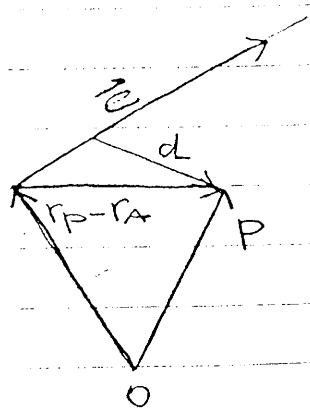
kanonična oblika:

$$\frac{x - a_1}{e_1} = \frac{y - a_2}{e_2} = \frac{z - a_3}{e_3}$$

## ⇒ RAZDALJA MED TOČKAMA, RAZDALJA MED TOČKO IN PREMICO

### ∘ RAZDALJA MED TOČKO IN PREMICO

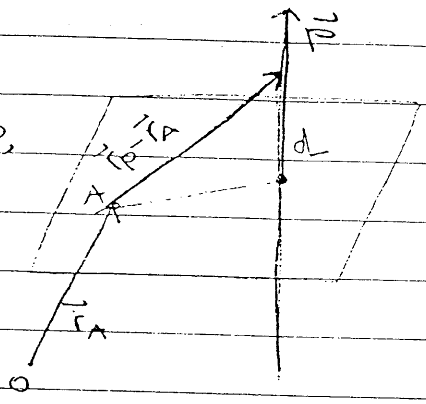
Razdalja točke P od premice, ki gre skozi točko A v smeri vektorja $\vec{e}$, je enaka višini paralelograma napetega na vektorja $\vec{e}$ in $\vec{r}_P - \vec{r}_A$, na osnovnico $\vec{e}$, torej:




$$d = \frac{|(\vec{r}_P - \vec{r}_A) \times \vec{e}\,|}{|\vec{e}\,|}$$

## ⇒ RAZDALJA MED TOČKO IN RAVNINO, RAZDALJA MED PREMICAMA, RAZDALJA MED PREMICO IN RAVNINO

1. TOČKA – RAVNINA




Razdalja d točke P, ki ima krajevni vektor $\vec{r}_P$ od ravnine, ki gre skozi točko A s krajevnim vektorjem $\vec{r}_A$ in ima normalni vektor $\vec{n}$, je enaka dolžini projekcije vektorja $\vec{r}_P - \vec{r}_A$ na smer $\vec{n}$

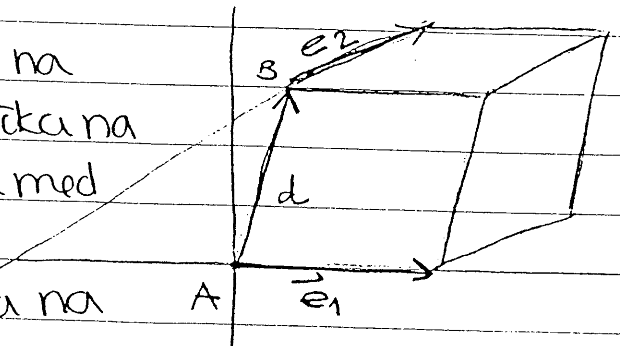
$$d = \left|(\vec{r}_A - \vec{r}_P)\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|.$$

$ax+by+cz=d$ ~ ravnina $\quad T_1(x_1, y_1, z_1)$ ~ točka

$$d = \frac{|ax_1+by_1+cz_1-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

2. PREMICA – PREMICA

1. VZPOREDNI PREMICI (= TOČKA – PREMICA)
2. PREMICI NISTA VZPOREDNI; IMATA SMERNA VEKTORJA $\vec{e}_1$ IN $\vec{e}_2$, KI NISTA KOLINEARNA




Naj bo A poljubna točka na prvi, B pa poljubna točka na drugi premici. Razdalja med njima je potem višina paralepipeda napetega na vektorji $\vec{r}_A - \vec{r}_B$, $e_1$ in $e_2$, na osnovno plosken napeto na vektorja $\vec{e}_1$ in $\vec{e}_2$:

$$d = \frac{|\vec{r}_A - \vec{r}_B, e_1, e_2|}{|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2|}$$

3. PREMICA – RAVNINA

1. RAVNINA IN PREMICI VZPOREDNI – potem vse točke na premici enako oddaljene od ravnine. Izračunamo kot d(T, ravnino).
2. Če ravnina in premica nista vzporedni, je razdalja nič.

⇒ RAČUNANJE Z MATRIKAMI

DEFINICIJA: Matrika velikosti $m \times n$ je pravokotna shema števil. V matriki $m \times n$ je $m \cdot n$ števil. Matriko velikosti $1 \times n$ imenujemo VRSTIČNA MATRIKA, matriko velikosti $m \times 1$ pa STOLPČNA matrika.

SEŠTEVANJE MATRIK: seštejemo lahko samo matrike enakih dimenzij. Matriki seštejemo tako, da seštejemo istoležne elemente.

MNOŽENJE MATRIK S SKALARJEM: matriko pomnožimo s skalarjem tako, da pomnožimo vsak element.

Naj bosta A in B matriki velikosti $m \times n$. Potem za njuno vsoto velja:

$A + B = B + A$

$(A+B)+C = A + (B+C)$

Za produkt matrike s skalarjem pa velja:

$c \cdot (A+B) = c \cdot A + c \cdot B$

$(c+d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A$

Velja še: $1 \cdot A = A$

$A + 0 = A$

## TRANSPONIRANJE MATRIK

Pri transponiranju matrike zamenjamo vlogo stolpcev in vrstic.
Naj bo $A=[a_{ij}] \in M_{m \times n}$. Potem je njena transpon oblika, ki jo označimo z $A^T=[a_{ji}] \in M_{n \times m}$

Velja:

$(A+B)^T = A^T + B^T$

$(C \cdot A)^T = C \cdot A^T$

## MNOŽENJE MATRIK

Matriki $A_{m \times n}$ in $B_{p \times q}$ lahko zmnožimo, če je število stolpcev prve matrike enako številu vrstic druge; torej $n=p$. Produkt $C=A \cdot B$ je matrika reda $(m \times q)$, ki ima na mestu $(i,j)$ element

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

LASTNOSTI:

- $A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $(A+B) \cdot C = AC + BC$
- $(\lambda A) \cdot B = \lambda (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B)$
- $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

* $A \cdot B \neq B \cdot A$

## ⇒ RANG MATRIKE

DEFINICIJA: Rang matrike A je red največje kvadratne matrike v pravokotni matriki A, ki ima determinanto različno od 0.

$\text{rang } A \leq \min\{m,n\}$

TRDITEV:

$$\text{rang} A = \text{rang} A^T$$

(determinanta se pri transponiranju ne spremeni)

IZREK: Naj bo A kvadratna ($A \in M_{n \times n}$)
Potem je A obrnljiva matrika natanko tedaj, ko je rang od A enak n.

DOKAZ: A obrnljiva $\Leftrightarrow$ $\det A_{n \times n} \neq 0$ $\Leftrightarrow$ $\text{rang} A = n$

TRDITEV: Naj bo $A \in M_{n \times m}$
Rang matrike se ne spremeni če:

* I. v matriki zamenjamo dve vrstici
II. če pomnožimo katerokoli vrstico z neničelnim številom
III. če katerikoli vrstici prištejemo ~~neničelni~~ večkratnik katerekoli druge vrstice.

Enako velja za stolpce, saj transponiranje ne spremeni ranga.

TRDITEV: (ekvivalentna definicija ranga)
Rang matrike $A \in M_{m \times n}$ je enak številu linearno neodvisnih vrstic matrike. (enako velja za stolpce)

Opomba: Operacije, ki ne spremenijo ranga matrike, imenujemo elementarne operacije. To so operacije *.
Rang matrike bomo dobili tako, da s pomočjo elementarnih operacij preoblikujemo matriko v "zgornje trikotno", nato upoštevamo, da je rang enak številu linearno neodvisnih vrstic

## ⇒ INVERZNA MATRIKA (DEFINICIJA, LASTNOSTI, IZRAČUN)

IZREK: Inverzna matrika matrike A obstaja natanko tedaj, ko je determinanta matrike A različna od 0.

Naj za A obstaja inverzna matrika (pravimo, da je A obrnljiva), potem je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$$ pri čemer so

$A_{ij}$ koeficienti matrike A.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \left[ \quad \right]_{(n-1)\times(n-1)}$$

IZREK: Naj bosta A in $B \in M_n$ obrnljivi matriki. Potem je obrnljiva tudi matrika AB in velja:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

## ⇒ POSEBNE VRSTE MATRIK

* SIMETRIČNE & POŠEVNO SIMETRIČNE

Kvadratna matrika A je simetrična, če je $A^T = A$, torej, če je $a_{ij} = a_{ji}$ za vsak i in j.

Kvadratna matrika A je poševno simetrična ali antisimetrična, če je $A^T = -A$, torej če je $a_{ij} = -a_{ji}$ za vsak i, j.

* HERMITSKE & POŠEVNO HERMITSKE

Matrika A je hermitska, če je $A^* = A$. Matrika A je poševno hermitska ali antihermitska, če je $A^* = -A$. Hermitska matrika ima na diagonali samo realna števila, poševno hermitska pa samo čista imaginarna števila.

* KOMPLEKSNE - elementi matrike A so kompleksna števila

* KVADRATNE

## ⇒ SISTEMI LINEARNIH ENAČB - OSNOVNI IZREK

Sistem m-linearnih enačb z n-neznankami $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1$

$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2$

$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m$ zapišemo v matrični obliki $Ax = B$ pri čemer je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}; \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n \times 1} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_n \end{bmatrix} \in M$$

$$\boxed{A_{m \times n} \cdot X_{n \times 1} = B_{m \times 1}}$$

IZREK: Sistem n-linearnih enačb z n-neznankami ima rešitev natanko tedaj, ko je rang matrike A enak rangu razširjene matrike $R = r$. Če je rang $A = r$, enak številu neznank n, potem obstaja natanko ena rešitev sistema. Če je rang A manjši od števila neznank ($r < n$), potem si lahko $n-r$ neznank poljubno izberemo; ostale so s temi natanko določene.

\+ $AX = B$; $B = 0$ ⇒ homogen sistem (ima vedno rešitev: rang A = rang R

Rešitev $X = 0$ ki vedno obstaja je TRIVIALNA. NETRIVIALNA obstaja, kadar je rang A < števila neznank.

Aleta

## ⇒ GAUSSOVA METODA ZA REŠEVANJE SISTEMA LINEARNIH ENAČB

(sistem lin. enačb)

1. če zamenjamo dve enačbi, to ne vpliva na enačba ~ zamenjamo vrstici matrike
2. če enačbo pomnožimo z neničelnim številom, to ne vpliva na rešitev ~ ~~a~~ z neničelnim številom pomnožimo vrstico matrike
3. če od enačbe odštejemo večkratnik druge, to ne vpliva na rešitev ~ odštejemo večkratnik druge vrstice

Z Gaussovo metodo rešimo sistem tako, da matriko z elementarnimi operacijami preoblikujemo do „zgornje trikotne".

## ⇒ VEKTORSKI PROSTOR

DEFINICIJA: Vektorski prostor ali linearen prostor $V$ je neprazna množica z elementi ki jim pravimo vektorji, v katerih sta definirani dve operaciji: seštevanje vektorjev in množenje vektorja s skalarjem. Seštevanje priredi vektorjema $\vec{x}$ in $\vec{y}$ njuno vsoto $\vec{x}+\vec{y} \in V$, množenje vektorja s skalarjem pa priredi skalarju $\alpha$ in vektorju $\vec{x}$ vektor $\alpha\vec{x} \in V$

(Lastnosti - str. 60)

## ⇒ BAZA VEKTORSKEGA PROSTORA

DEFINICIJA: Vektorji $\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n \in V$ sestavljajo bazo vektorskega prostora $V$, če so linearno neodvisni in če se vsak vektor $\vec{x} \in V$ izraža kot linearna kombinacija

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \cdot \vec{b}_n.$$

Moč baze (število elementov baze) je dimenzija prostora $V$.

## ⇒ LINEARNA NEODVISNOST VEKTORJEV

Množica vektorjev $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in V$ je linearno neodvisna, če je linearna kombinacija

$\alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_n \vec{x}_n$ enaka ničelnemu vektorju samo, če so vsi skalarji $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ enaki 0.

## ⇒ LINEARNA PRESLIKAVA

Naj bosta $V_1$ in $V_2$ vektorska prostora in $F: V_1 \to V_2$ preslikava med njima.

DEFINICIJA:

Preslikava $F: V_1 \to V_2$ je linearna preslikava ali linearna transformacija, če za poljubno linearno kombinacijo

$\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} \in V_1$ velja

$$F(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha F(\vec{x}) + \beta F(\vec{y}).$$

Linearna transformacija torej ohranja linearne kombinacije.

## ⇒ LASTNE VREDNOSTI, LASTNI VEKTORJI MATRIKE

Lastni vektorji so tisti, ki jim matrika ne spremeni smeri.

Naj bo $A \in M_n$ kvadratna matrika; potem pravimo, da je vektor $X_0 \in M_{n \times 1}$ lastni vektor matrike A, če je $X_0 \neq 0$ in obstaja število $\lambda$ tako da je $AX_0 = \lambda X_0$.

Število $\lambda$ imenujemo lastna vrednost, ki pripada lastnemu vektorju $X_0$.

Homogen sistem ima več kot eno rešitev takrat, ko je rang matrike $A - \lambda I$ manjši od števila neznank. Torej manjši od n. Rang matrike je manjši od n, če je determinanta velikosti $n \times n = 0$. Torej bo obstajal lastni vektor, če je $\underbrace{\det(A - \lambda I) = 0}_{\text{KARAKTERISTIČNA ENAČBA}}$.

## ⇒ LASTNE VREDNOSTI HERMITSKIH, POŠEVNO HERMITSKIH, UNITARNIH MATRIK

1. HERMITSKE MATRIKE SO REALNE

Naj bo A hermitska in $AX = \lambda X$, torej $\lambda$ njena lastna vrednost.

Kvadratna forma hermitske oblike je realno število

Torej:

$$\underset{\mathbb{R}}{\overline{X}^T \cdot A X} = \tilde{X} \lambda X = \lambda \cdot \underbrace{\overline{X} \cdot X}_{\in \mathbb{R}}$$

2. A = POŠEVNO HERMITSKA

$\overline{X}^T A X = \overline{X}^T \lambda X = \lambda \cdot \overline{X}^T X \Rightarrow \lambda$ - čisto imag. število

3. Če je $U$ unitarna matrika je $U \cdot U^* = I$; torej $U^* = U^{-1}$

$U^* \cdot U \cdot X = I \cdot X$

$U^* \lambda X = X$

$X^T \cdot U^* \lambda X = X^T \cdot X$

$\overline{X}^T \cdot \overline{\lambda} \cdot \lambda \cdot X = \overline{X}^T \cdot X \Rightarrow \overline{\lambda} \lambda = 1 \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{|\lambda| = 1}}$

⇒ FUNKCIJSKA VRSTA (DEFINICIJA, DEFINICIJSKO OBMOČJE, KONVERGENCA)

DEFINICIJA: Funkcijska vrsta je definirana kot „neskončna vsota" funkcij $U_1(x)+U_2(x)+U_3(x)+\ldots$ to pomeni, da je definirana kot zaporedje delnih vsot funkcij.

DEFINICIJSKO OBMOČJE funkcijske vrste je množica X, za katere funkcijska vrsta konvergira.

Funkcijska vsota je KONVERGENTNA, torej obstaja za tiste vrednosti spremenljivke x, za katere konvergira številska vrsta, ki jo dobimo, ko konkreten x vstavimo v funkcijsko vrsto.

Funkcijska vrsta $S(x)=U_1(x)+U_2(x)+\ldots$ je ENAKOMERNO KONVERGENTNA na intervalu $[a,b]$, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $n_0\in\mathbb{N}$, da je $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$ za vsak $x\in[a,b]$. (Torej je pri izbranem $\varepsilon$ za vsak x iz tega intervala dober isti $n_0$).

* Če je funkcijska vrsta enakomerno konvergentna potem jo lahko členoma integriramo / odvajamo.

## ⇒ POTENČNA VRSTA (DEFINICIJA, KONVERGENCA)

DEFINICIJA: Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 \cdot (x-x_0)^2 + \ldots$$

DEFINICIJA: Naj bo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ potenčna vrsta.

Če obstaja $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$ potem jo imenujemo KONVERGENČNI POLMER potenčne vrste.

IZREK: Naj bo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ potenčna vrsta, potem ta potenčna vrsta konvergira za vsak $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Za vsak $x$, ki ni element intervala $(x_0-R, x_0+R)$ potenčna vrsta divergira. Za $x = x_0 - R$ in $x = x_0 + R$, vrsta lahko konvergira ali divergira.

## ⇒ ODVAJANJE IN INTEGRIRANJE POTENČNIH VRST

IZREK: Naj bo $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$. Potem je $S(x)$ zvezna funkcija na $(x_0-R, x_0+R)$.
Velja še:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n (x-x_0)^{n-1} ;$$

$$S'(x) = a_1 + a_2 \cdot 2 (x-x_0) + \ldots$$

$$\int S(x)\,dx + C = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

okrog točke a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$\Rightarrow$ TAYLORJEVA VRSTA FUNKCIJE $f$

IZREK: Funkcija $f(x)$, ki se izraža kot vsota potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ s konvergenčnim polmerom $R$, je zvezna in neskončnokrat odvedljiva na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je $n$-ti odvod $f^{(n)}(x)$ vsota potenčne vrste, ki jo dobimo, če vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $n$-krat členoma odvajamo.
Koeficienti $a_n$ dane vrste so natanko določeni z vrednostjo funkcije $f$ in njenih odvodov v točki $x_0$ in so enaki

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Drugače povedano, vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ je TAYLORJEVA VRSTA funkcije $f(x)$ okrog točke $x_0$.

$\Rightarrow$ TAYLORJEVA VRSTA FUNKCIJ $e^x$, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$

$\boxed{f(x) = e^x}$; razvijemo okoli $a = 0$

$f(x) = e^x \quad f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \quad f'(0) = 1$

$\vdots \; f^{(n)}(x) = e^x \quad f^{(n)}(0) = 1$

Sledi: $e^x = 1 + \frac{1}{1}\cdot x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\cdot x^n}$

$\boxed{f(x) = \sin x}$

$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$

$\vdots$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}}$$

$\boxed{f(x) = \cos x}$

$f(x) = \cos x \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x \qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = \cos x \qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x \qquad f'''(0) = 0$

$\vdots$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}}$$

$\boxed{f(x) = \ln(1+x)}$

$f(x) = \ln(x+1) \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = (1+x)^{-1} \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -1(1+x)^{-2} \qquad f''(0) = -1$

$f^{(n)}(x) = (-1)(-2) \cdots (-n+1)(1+x)^{-n} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)(-2) \cdots (-n+1)$

$$\ln(1+x) = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \dots =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots \boxed{= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}}$$

## ⇒ BINOMSKA VRSTA, BINOMSKI KOEFICIENTI

$f(x) = (1+x)^m$ ; $m \in \mathbb{R}$ – razvij funkcijo v binomsko vrsto

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$$

oznaka $\binom{m}{n} = \dfrac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}$ je binomski simbol

$m \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$

LASTNOSTI BINOMSKEGA SIMBOLA:

1. če je $m \in \mathbb{N}$, potem je $\binom{m}{n} = \dfrac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \dots$

$$\boxed{\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}}$$

2. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

3. vemo, da je $(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n$. Ker je $m \in \mathbb{N}$, je $\binom{m}{n} = 0$ za vsak $n > m$.

4. $\binom{m}{0} = 1$

$$\binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} + \frac{m!}{(k+1)!\,(m-(k+1))!} \dots = \binom{m+1}{k+1}$$

[dobimo formulo za Pascalov △] $\binom{m}{0} = 1$ $\binom{m}{1} = m$

VELJA: $(1+a)^m = 1 + \binom{m}{1} a + \binom{m}{2} a^2 + \dots + \binom{m}{m} a^n$

KONVERGENCA BINOMSKE VRSTE

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\binom{m}{n}}{\binom{m}{n+1}} \right| \dots = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = \left| \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\frac{m}{n}-1\right)} \right| = \underline{\underline{1}}$$

Vrsta konvergira za $x \in (-1, 1)$

⇒ FOURIEJEVA VRSTA (DEFINICIJA, KONVERGENCA)

DEFINICIJA: Funkcija $f$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je periodična s periodo $p$, če je $f(x) = f(x+p)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$

DEFINICIJA: Funkcijsko vrsto
$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ imenujemo TRIGONOMETRIJSKA VRSTA. Za vse tiste $x$-e, kjer konvergira, je periodična s periodo $2\pi$.

Naj bo $f$ periodična funkcija s periodo $2\pi$. Denimo, da jo lahko razvijemo v trigonometrijsko vrsto.

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cdot \cos 2x + \ldots + b_1 \cdot \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots =$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx).$$

Zanimajo nas koeficienti – dobimo z integriranjem na intervalu $[-\pi, \pi]$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(nx) \cdot dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$ – FOURIEJEVA VRSTA FUNKCIJE F.

IZREK O KONVERGENCI FOURIERJEVE VRSTE

Naj bo $f$ odsekovno zvezna periodična funkcija s periodo $2\pi$ za katero velja, da ima povsod levi in desni odvod. Potem lahko $f$ razvijemo v Fourierovo vrsto
$f(x) = a_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx)$, ki je konvergentna. Leva stran je enaka desni za vsak $x$ razen za tiste $x$ kjer funkcija $f$ ni zvezna. Za te vrednosti spremenljivke je desna stran enaka aritmetični sredini leve in desne limite funkcije $f$.

⇒ FOURIEROVA VRST, POLJUBNO PERIODO

Naj bo f(x) periodična fja s periodo 2a. Če upeljemo novo spremko $t = \pi x / a$, bo funkcija $f(x) = f(at/\pi) = g(t)$ fcna s periodo $2\pi$. Če se $g(t)$ izraža kot vsota njene vrste

$$g(t) = f\left(\frac{at}{\pi}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_t + b_n \cdot \sin nt) \text{ je}$$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}\right); \text{ kjer so}$$

koeficienti:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f\left(= \frac{1}{2a} \cdot \int_{-a}^{a} f(x)\,dx\right.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{at}{\pi}\right) \cos nt\,dt = ) \cdot \cos \frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{at}{\pi}\right) \sin nt\,dt\; f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}\,dx$$

⇒ SINUSNA IN KOSINUSURIERJEVA VRSTA

Fourierjeva vrsta lihe f(x) s periodo 2a je
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad b_n = \frac{2}{a} \cdot \int_0^a f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{a}\,dx.$$

Vrsto imenujemo sinusrjeva vrsta

Fourierjeva vrsta sode f(x) s periodo 2a je
$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{a}, \quad a_0 = \frac{1}{a} \cdot \int_0^a f(x)\,dx;$$

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{a}\,d$$

Vrsto kosinusna Four. vrsta.

## ⇒ FUNKCIJA DVEH SPREMENLJIVK (DEFINICIJA, ZVEZNOST, LIMITA, GRAF)

DEFINICIJA:

1. Funkcija dveh spremenljivk je preslikava, ki vsaki točki $(x,y)$ ravninske množice $D$ priredi realno število $z=f(x,y)$, torej preslikava
$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Množica $D$ je definicijsko območje funkcije $f$.

ŽVEZNOST

Funkcija $f: D \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $(x_0,y_0)$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x_0,y_0) - f(x,y)| < \varepsilon$, čim je
$(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 < \delta^2$.

LIMITA:

Število $L$ je limita funkcije $f(x,y)$, ko gre točka $(x,y)$ proti točki $(a,b)$;

$L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$; če obstaja za vsak

$\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da je $|f(x,y) - L| < \varepsilon$, če je
$0 < (x-a)^2 + (y-b)^2 < \delta^2$.

GRAF:

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$; $D \in \mathbb{R}^2$, funkcija dveh spremenljivk, potem je njen graf
$\Gamma(f) = \{ (x,y,f(x,y)); (x,y) \in D \}$ ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$.

[pravokotna projekcija te ploskve na ravnino $z=0$ je definicijsko območje funkcije $D$; pravokotna projekcija na os $z$ pa je njena zaloga vrednosti].

## ⇒ ODVOD FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}$; $D \subset \mathbb{R}^2$ zvezna funkcija. Če obstaja limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$ jo imenujemo PARCIALNI ODVOD FUNKCIJE f po spremenljivki x in označimo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_x(x,y)$$

Podoben je parcialni odvod funkcije f po spremenljivki y enak

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

DEFINICIJA: Funkcija f je diferenciabilna, ~~če jo lahko~~ v točki $(a,b)$ če obstajata parcialna odvoda $A = f_x(a,b)$ in $B = f_y(a,b)$ in je

$$\lim_{h,k\to 0} \frac{f(a+h,b+k) - f(a,b) - (Ah+Bx)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

IZRAZ $df = f_x dx + f_y dy$ imenujemo TOTALNI DIFERENCIAL.

TRDITEV: Če je funkcija f v točki $(a,b)$ diferenciabilna potem je

$$f(a+h,b+k) \approx f(a,b) + f_x \cdot h + f_y \cdot k$$

## ⇒ POSREDNO ODVAJANJE
[= verižno pravilo]

Naj bo funkcija $z=f(x,y)$ diferenciabilna, spremenljivki $x$ in $y$ pa naj bosta odvedljivi funkciji parametra $t$; torej $x=x(t)$ in $y=y(t)$. Potem je tudi $z=f(x(t),y(t))$ posredna funkcija parametra $t$ in njen odvod je

$$\frac{dz}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x(t+h),y(t+h))-f(x(t),y(t))}{h}.$$

Naj bo $\Delta x = x(t+h)-x(t)$ in $\Delta y = y(t+h)-y(t)$.
Potem je:

$$\frac{dz}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f_x\cdot\Delta x+f_y\cdot\Delta y+\eta\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0} f_x\cdot\frac{\Delta x}{h}+f_y\cdot\frac{\Delta y}{h}+\eta\cdot\frac{1}{h}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

Ker sta $x(t)$ in $y(t)$ odvedljivi funkciji, je

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta x}{h}=x'(t) \text{ in } \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=y'(t)$$ ker pa je

$f$ diferenciabilna, je $\lim\limits_{h\to 0}\eta=0$ in

$$\lim_{h\to 0}\eta\cdot\frac{1}{h}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\lim_{h\to 0}\eta\left(\pm\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\right)=0$$

Od tod sledi, da je

$$\frac{dz}{dt}=f_x\cdot x'(t)+f_y\cdot y'(t).$$

$f=f(u,v)$
$u=u(x)$
$v=v(x)$

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}$$

② $f=f(u)$
$u=u(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{df}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

③ $f=f(u,v)$
$u=u(x,y)$ $v=v(x,y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

## ⇒ VIŠJI PARCIALNI ODVODI

Naj bo ~~funkcija f~~ f funkcija dveh spremenljivk. Če njena parcialna odvoda obstajata in sta zopet parcialno odvedljiva, ju lahko odvajamo in dobimo parcialne odvode drugega reda. Postopek lahko nadaljujemo in dobimo parcialne odvode višjega reda.

Če druga mešana parcialna odvoda $f_{xy}$ in $f_{yx}$ obstajata in sta zvezni funkciji, sta enaka.

## ⇒ TAYLORJEVA VRSTA FUNKCIJE DVEH SPREMENLJIVK

Funkcijo dveh spremenljivk lahko razvijemo po Taylorjevi formuli.

Funkcija $f(x,y)$ naj bo $(n+1)$ krat zvezno parcialno odvedljiva na obe spremenljivki v okolici točke $(a,b)$. Potem velja:

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \left[f_x(a,b)\cdot h + f_y(a,b)\cdot k\right] + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left[\sum_{n=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial^{n-i}x\,\partial^i y}\cdot(a,b)\cdot h^{n-i}\cdot k^i\right] + R_n \quad \text{kjer je}$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{n=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1} f}{\partial^{n+1-i}x\,\partial^i y}(a+\Theta h, b+\Theta k)\,h^{n+1-i}\,k^i,$$

$$0 \leq \Theta \leq 1.$$

## ⇒ IZREK O IMPLICITNI FUNKCIJI

Naj bo $F(x,y)$ zvezna in diferenciabilna funkcija v okolici točke $(a,b)$ in naj bo $F(a,b)=0$. Če je $F_y(a,b) \neq 0$, obstaja odvedljiva funkcija $y=y(x)$, ki je definirana v neki okolici točke $a \in \mathbb{R}$ in zadošča pogojema:

$$y(a)=b, \quad F(x,y(x))=0.$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}}$$

* Izrek o implicitni funkciji velja tudi za funkcije več spremenljivk, ki zadoščajo ustreznim pogojem.

V primeru, da je $z=z(x,y)$ podana implicitno $F(x,y,z(x,y))=0$.

$$\boxed{z_x = -\frac{F_x}{F_z}} \quad \boxed{z_y = -\frac{F_y}{F_z}}$$

## ⇒ EKSTREMI FUNKCIJE DVEH SPREMENLJIVK

Funkcija $f=f(x,y)$ ima v točki $(a,b)$ maximum, če velja:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)<0$$

Funkcija ima v točki $(a,b)$ minimum, če velja:

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)>0.$$

Če je v točki $(a,b)$ ekstrem, potem sta parcialna odvoda f-je v tej točki enaka nič.

$f_x(a,b)=0$ in $f_y(a,b)=0$. Ta pogoj je potreben, ne pa zadosten pogoj za nastop ekstrema.

Če sta v točki $(a,b)$ oba parcialna odvoda enaka nič, potem to točko imenujemo STACIONARNA TOČKA. – te točke so kandidati za ekstreme.

\+ ZADOSTEN POGOJ ZA NASTOP EKSTREMA

Točka $(a,b)$ naj bo stacionarna točka dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije $f(x,y)$, naj bodo $A = f_{xx}(a,b)$, $B = f_{xy}(a,b)$ in $C = f_{yy}(a,b)$

Velja: $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = \dfrac{(Ah+Bk)^2 + (AC-B^2)k^2}{A}$

Sledi:

1. Če je $AC-B^2 > 0$ je izraz pozitiven
   a) $A > 0$ je celoten izraz pozitiven; torej je v $(a,b)$ minimum
   b) $A < 0$ je celoten izraz negativen, torej je v $(a,b)$ maximum.

2. Če je $AC-B^2 < 0$ pri različnih $h$ in $k$ je celoten izraz pozitiven ali negativen, ni ekstrema je SEDLO!

3. Če je $AC-B^2 = 0$ potem nam drugi odvod ne pove dovolj.

⇒ HESSEJEVA MATRIKA

Hessejeva matrika je matrika drugih parcialnih odvodov

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

Običajno je $f_{xy} = f_{yx}$ ⇒ $H(x,y)$ je simetrična matrika.

$$H(a,b) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad AC - B^2 = \det(H(a,b))$$

Naj bo f funkcija spremenljivk x in y in naj bo (a,b) stacionarna točka, torej
$f_x(a,b)=0$ in $f_y(a,b)=0$

Potem velja:

1. če je $\det(H(a,b))>0$ je v (a,b) ekstrem in sicer:
   a) $f_{xx}(a,b)>0$ je ekstrem minimum
   b) $f_{xx}(a,b)<0$ je ekstrem maximum
2. če je $\det(H(a,b))<0$ je v (a,b) sedlo
3. če je $\det(H(a,b))=0$ ne vemo

## ⇒ VEZANI EKSTREMI FUNKCIJE DVEH SPREMENLJIVK

Naj bo funkcija $f(x,y)$ definirana na območju $D \subseteq \mathbb{R}^2$ in $g(x,y)=0$ implicitna enačba neke krivulje v D. Vezani ekstrem je ekstrem funkcije $f(x,y)$ na množici točk, ki zadoščajo pogoju $g(x,y)=0$. Drugače povedano, vezani ekstrem je ekstrem funkcije f nad dano krivuljo.

npr: $f(x,y)=x+2y$ ; $x^2+y^2=5$

$F(x,y,\lambda)=x+2y+\lambda(x^2+y^2-5)$

$F_x=0$

$F_y=0$

$F_\lambda=0$

* ŽAČETNI PROBLEM = dif enačba skupaj z začetnim pogojem
$F(x,y,y')=0;\ y(x_0)=y_0$

## ⇒ DIFERENCIALNA ENAČBA (DEFINICIJA, ZAČETNI PROBLEM, ROBNI PROBLEM)

Navadna diferencialna enačba je zveza med neodvisno spremenljivko x, odvisno spremenljivko y in njenimi odvodi

$$F(x,y,y',\dots y^{(n)})=0$$

Parcialne diferencialne enačbe povezujejo dve ali več neodvisnih spremenljivk, odvisno spremenljivko in njene parcialne odvode.

Red diferencialne enačbe je red najvišjega odvoda v enačbi.

npr: dif. enačba 1. reda: $F(y',y,x)=0$

Rešitev dif. enačbe v kateri nastopa poljubna konstanta, imenujemo SPLOŠNA REŠITEV dif. enačbe. Točno določena rešitev dif. enačbe se imenuje PARTIKULARNA REŠITEV.
Partikularno rešitev dobimo tako, da podamo še dodaten pogoj

1. ZAČETNI pogoj $y(x)=y_0$
2. ROBNI pogoj (npr vpetost strune)

## ⇒ DIFERENCIALNA ENAČBA Z LOČLJIVIMI SPREMENLJIVKAMI

$$y'=f(x,y) \Rightarrow y'=g(x)\cdot h(y) \qquad y'=\frac{dy}{dx}$$

oz. $\boxed{g(y)\cdot y'=f(x)}$

# ⇒ LINEARNA DIFERENCIALNA ENAČBA 1. REDA (HOMOGENA, NEHOMOGENA)

DEFINICIJA: Diferencialna enačba oblike
$y' + f(x) y = g(x)$ se imenuje linearna dif. enačba prvega reda.
Odvisni spremenljivki $y'$ in $y$ nastopata linearno. Funkciji $f$ in $g$ kot funkciji spremenljivke $x$ pa sta poljubni (lepi).

Če je $g(x)=0$ za vsak $x$, potem pravimo, da je dif. enačba $y' + f(x) \cdot y = 0$ HOMOGENA.
homogena dif. enačba 1. reda
linearna

$\ast$ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ = HOMOGENA ENAČBA
vpeljemo novo odvisno spr. $u$; $y = u \cdot x$;
$y' = u'x + u$. ⇒ dobimo enačbo z ločljivima spremenljivkama $u + u'x = f(u)$

Nehomogena linearna dif. enačba 1. reda
$y' + f(x) \cdot y = g(x)$ – rešimo z metodo VARIACIJE KONSTANTE.

## ⇒ BERNOULLIJEVA DIFERENCIALNA ENAČBA

Enačbo oblike

$$y' + f(x)\cdot y = g(x)\cdot y^n$$ kjer sta $f(x)$ in $g(x)$

zvezni funkciji spremenljivke $x$, in je $n \neq 0$ in $n \neq 1$, imenujemo Bernoullijeva enačba.

Z uvedbo nove odvisne spremenljivke jo lahko prevedemo na linearno enačbo.

* delimo z $y^n$:

$$y^{-n}\cdot y' + f(x)\cdot y^{-n+1} = g(x)$$

* Vpeljemo novo odvisno spremenljivko s predpisom $z = y^{-n+1}$, odvajamo

$z' = (-n+1)\cdot y^{-n}\cdot y'$ ; vstavimo v prvotno enačbo in dobimo:

$$z' + (-n+1)\cdot f z = (-n+1)\cdot g$$

## ⇒ EKSAKTNA DIFERENCIALNA ENAČBA

Vsako dif. enačbo $y' = f(x,y)$ lahko zapišemo v obliki $M(x,y)\cdot dx + N(x,y)\,dy = 0$.

Funkciji $M$ in $N$ v enačbi sta funkciji dveh neodvisnih spremenljivk.

DEFINICIJA: Diferencialna enačba $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ je eksaktna, če sta $M$ in $N$ obe zvezno parcialno odvedljivi na obe spremenljivki in velja, da je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Pri eksaktni enačbi lahko z integriranjem najdemo tako funkcijo $F(x,y)$, da je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{in} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N$$

Tako je na levi strani ( $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ ) totalni diferencial funkcije $F(x,y)$ in enačbo lahko zapišemo kot

$$dF(x,y) = 0.$$

Splošna rešitev eksaktne dif. enačbe je tako dana implicitno z enačbo

$$F(x,y) = C$$

⇒ VPELJAVA PARAMETRA V DIFERENCIALNO ENAČBO : $F(x,y')=0$ $\quad x = \varphi(y')$

• ENAČBA NE VSEBUJE ODVISNE SPREMENLJIVKE (y)

$F(x,y')=0$; včasih $y'$ ne moremo eksplicitno izraziti z $x$, lahko pa obratno, izrazimo $x$ z $y'$, torej : $x = \varphi(y')$. To enačbo diferenciramo in vpeljemo parameter $p = y'$:

$$dx = \varphi'(p)dp.$$

Ker pa je $dy = p dx$, je tudi

$$dy = p\cdot\varphi'(p)dp, \text{ torej } y(p) = \int p\cdot\varphi'(p)dp.$$

Rešitev v parametrični obliki je :

$$x(p) = \varphi(p);$$

$$y(p) = \int p\cdot\varphi'(p)dp.$$

• ENAČBA NE VSEBUJE NEODVISNE SPREMENLJIVKE (x)

Tudi enačbo $F(y,y')=0$ lahko včasih rešimo tako, da izrazimo $y$ kot funkcijo $y'$.

$y = \varphi(y')$, diferenciramo, delimo z $y'$, vpeljemo $y'=p$ in upoštevamo, da velja zveza $dx = \frac{dy}{p}$

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(p)}{p}\cdot dp.$$

Integriramo in dobimo rešitev, spet v parametrični obliki

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp, \quad y = \varphi(p)$$

⇒ ORTOGONALNE TRAJEKTORIJE

DEFINICIJA: Naj bo podana enoparametrična družina krivulj v ravnini. Potem krivuljo, ki je pravokotna na vse krivulje dane družine, imenujemo ORTOGONALNA TRAJEKTORIJA.

Ortogonalna trajektorija ima smerni koeficient tangente v dani točki enak $-\frac{1}{k}$ pri čemer je $k$ smerni koeficient prvotne krivulje v dani točki.

Če torej za družino krivulj velja dif. enačba $y' = f(x,y)$, potem za ortogonalne trajektorije velja dif. enačba:

$$-\frac{1}{y'} = f(x,y) \quad \text{oz:} \quad y' = -\frac{1}{f(x,y)}.$$

⇒ EKSISTENCA IN ENOLIČNOST REŠITVE DIFERENCIALNE ENAČBE

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

~ problem ima lahko eno rešitev, neskončno rešitev, ali pa rešitve nima

EKSISTENČNI IZREK

Naj bo dan začetni problem $y' = f(x,y)$, in $y(x_0) = y_0$. Če je $f$ zvezna in omejena na nekem območju $Q = \{(x,y);\ |x-x_0| < a, |y-y_0| < b\}$, torej $|f(x,y)| < M$ ; $(x,y) \in Q$, potem rešitev obstaja. Če je dodatno omejen tudi parcialni

odvod na tem območju, torej $|f_y(x,y)| < N$, je rešitev natanko ena.
Dobimo jo lahko s pomočjo PICARDOVE iteracijske metode:

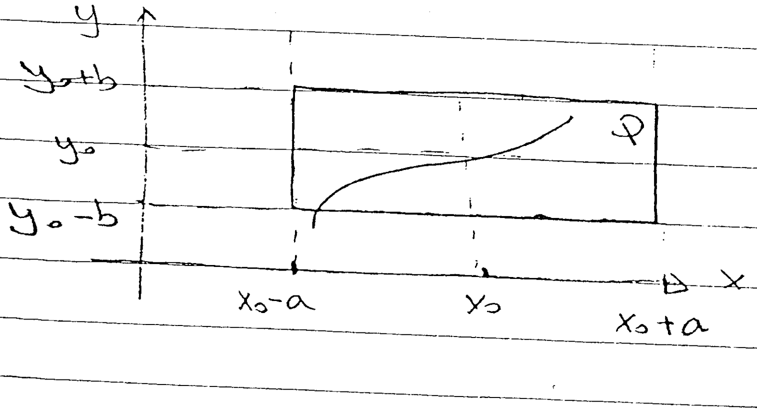
$$y_{(n)}(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t))\,dt$$

$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < M|y_1 - y_2|$ – LIPSCHITZOV POGOJ

IZREK O ENOLIČNOSTI REŠITVE
Če so izpolnjeni vsi pogoji eksistenčnega izreka, je rešitev začetnega problema natanko določena na intervalu $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$, kjer je $\beta$ manjši od števila $a$, $b/M$ in $1/N$.

EKSISTENČNI IZREK
Funkcija $f(x,y)$ naj bo definirana, zvezna in omejena z $|f(x,y)| < M$ v vseh točkah pravokotnika $Q = \{(x,y);\ |x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b\}$. Če obstaja taka konstanta $N$, da je $|f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq N|y_2 - y_1|$ za poljubni točki $(x,y_1)$ in $(x,y_2)$ iz $Q$, ima začetni problem vsaj eno rešitev $y(x)$, ki je definirana vsaj na intervalu $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, kjer je $\alpha$ manjši od števil $a$ in $b/M$.

Lipschitzov pogoj



## ⇒ SPLOŠNA REŠITEV LINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE DRUGEGA REDA

$F(x, y, y', y'') = 0$

splošna rešitev je dvoparametrična družina funkcij
$y = y(x, C_1, C_2)$.

Da bi lahko določili vrednost obeh konstant potrebujemo 2 ~~zac~~ dodatna pogoja.

* začetni pogoj : $y(x_0) = y_0$ ; $y'(x_0) = z_0$.

## ⇒ LINEARNA DIFERENCIALNA ENAČBA DRUGEGA REDA HOMOGENA S KONSTANTNIMI KOEFICIENTI

⇒ IZREK: Splošna rešitev linearne dif. enačbe 2. reda homogene

$$y'' + f_1(x) \cdot y' + f_0(x) \cdot y = 0 \quad \text{je}$$

enaka $y_H = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ pri čemer sta $y_1$ in $y_2$ linearno neodvisni rešitvi dif. enačbe

$y'' + f_1(x) y' + f_0(x) y = 0$.

IZREK: Linearno dif. enačbo oblike
$y'' + ay' + by = 0$ imenujemo homogena linearna dif. enačba s konstantnimi koeficienti.

Rešitev poiščemo z nastavkom: $\boxed{y = e^{rx}}$

(nastavek odvajamo in vstavimo v enačbo → dobimo :

$$\boxed{r^2 + ar + b = 0} = \text{KARAKTERISTIČNA ENAČBA}$$

(lahko ima 2 realni rešitvi, 1 realno ali konjugiran par kompleksnih števil)

1. DVE REALNI REŠITVI

$r_1 \neq r_2 \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x} \quad y_2 = e^{r_2 x}$

$y_H = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x}$

2. ENA REALNA REŠITEV

$r_1 = r_2 \Rightarrow y_1 = e^{r_1 x} \quad y_2 = x \cdot e^{r_1 x}$

$y_H = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$

3. 2 KOMPLEKSNI REŠITVI

$r_1 = p + iq \quad r_2 = p - iq$

$y_1 = e^{r_1 x} = e^{(p+iq)x} \qquad y_2 = e^{r_2 x} = e^{(p-iq)x}$

Splošna rešitev:

$y_H = K_1 \cdot e^{r_1 x} + K_2 \cdot e^{r_2 x} = K_1 (e^{px} \cdot e^{iqx}) + K_2 (e^{px} \cdot e^{-iqx}) =$

$= e^{px}(K_1((\cos(qx) + i \cdot \sin(qx)) + K_2 (\cos(qx) + i \cdot \sin(qx)))$

$= e^{px}(C_1 \cdot \cos(qx) + C_2 \cdot \sin(qx)) = y_H$

$\Rightarrow$ DETERMINANTA WRONSKEGA (LINEARNA ODVISNOST FUNKCIJ)

DEFINICIJA: Naj bosta $y_1$ in $y_2$ funkciji. Potem definiramo determinanto Wronskega

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x) \cdot y_2'(x) - y_2(x) \cdot y_1'(x)$$

(Funkcijska determinanta)

TRDITEV: Naj bosta $y_1$ in $y_2$ rešitvi homogene dif. enačbe $y'' + f_1(x) y' + f(x) y = 0$.
Če je $W(x) \neq 0$, za vsak $x$, potem sta $y_1$ in $y_2$ linearno neodvisni rešitvi.

Če obstaja nek $x_0$, tako da je $W(x_0)=0$, potem je $W(x)=0$ za vsak $x$. V tem primeru sta rešitvi $y_1$ in $y_2$ linearno odvisni.

⇒ LINEARNA DIFERENCIALNA ENAČBA S KONSTANTNIMI KOEFICIENTI, 2. REDA, NEHOMOGENA

Splošna rešitev ~~je~~ enačbe: ~~je~~

$$y''(x)+f_1(x)\cdot y'(x)+f_2(x)\cdot y(x)=r(x)$$

je $y(x)=y_H(x)+y_p(x)$ pri čemer je $y_H$ rešitev ~~ne~~ homogenega dela; $y_p$ pa partikularna rešitev.

Partikularno rešitev poiščemo na 2 načina:

1. z nastavkom, če je $r(x)$ lepa funkcija:
   a) če je $r(x)$ polinom, za nastavek vzamemo polinom iste stopnje
   b) če je ~~e~~ $r(x)=\sin x$ ali $r(x)\ \cos x$;
      $y_p=A\cdot\cos x+B\cdot\sin x$
   c) če je $r(x)=e^{ax}$; $y_p=Ae^{~~k~~ax}$
2. z metodo variacije konstante

## ⇒ EULERJEVA DIFERENCIALNA ENAČBA 2. REDA

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

Rešimo jo tako, da uvedemo novo spremenljivko $x = e^t$ in jo nato prevedemo na enačbo s konstantnimi koeficienti.

~ poiščemo rešitve karakteristične enačbe

$y = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + (a-1)\cdot\lambda + b = 0$

1. DVE RAZLIČNI REŠITVI $\lambda_1$ in $\lambda_2$

$y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \Rightarrow y(x) = C_1 x^{\lambda_1} + C_2 x^{\lambda_2}$

2. DVE ENAKI REŠITVI $\lambda_1 = \lambda_2$

$y(x) = C_1 \cdot x^{\lambda_1} + C_2 \cdot \ln x \cdot x^{\lambda_2}$

3. KOMPLEKSNI PAR

$\lambda_1 = p + iq \quad \lambda_2 = p - iq$

$y(x) = x^p \cdot (C_1 \cos(q \cdot \ln x) + C_2 \cdot \sin(q \cdot \ln x))$

## ⇒ REŠEVANJE NEHOMOGENE LINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE S KONSTANTNIMI KOEFICIENTI VIŠJEGA REDA S POMOČJO NASTAVKA.

## ⇒ SISTEMI DIFERENCIALNIH ENAČB

Sistem diferencialnih enačb prvega reda za dve neznani funkciji $y_1(x)$ in $y_2(x)$ izgleda takole

$$y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \quad y_2' = f_2(x, y_1, y_2).$$

Zapišemo ga lahko tudi v vektorski obliki, če je

$$y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad f(x, y_1, y_2) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2) \\ f_2(x, y_1, y_2) \end{bmatrix}, \text{ je}$$

$$y' = f(x, y_1, y_2)$$

Tak sistem je ekvivalenten eni sami diferencialni enačbi 2. reda, ki jo dobimo tako, da prvo enačbo odvajamo po neodvisni spremenljivki $x$.

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y_2' \quad \text{iz prve enačbe}$$

sistema izrazimo $y_2$ in vstavimo v . Tako dobimo dif. enačbo 2. reda

$$y_1'' = F(x, y_1, y_1'), \text{ za } y_1(x).$$