REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Dane so točke $A(1,0,3)$, $B(-2,2,1)$ in $C(5,-4,0)$ ter vektor $\vec{a}=(0,6,-6)$ v prostoru.

- Določite enačbo ravnine Π_1, ki vsebuje točko A, vektor $\vec{a}$ pa je nanjo pravokoten.
- Določite enačbo ravnine Π_2, ki vsebuje točke A, B in C.
- Izračunajte presečišče ravnin Π_1 in Π_2. Kakšno množico točk dobimo (točko, premico, ravnino, …)?

- *Ker je* $\vec{a}=(0,6,-6)=6\cdot(0,1,-1)$, *lahko za normalo ravnine* Π_1 *vzamemo* $\vec{n_1}=(0,1,-1)$. *Sledi enačba* $0\cdot x+1\cdot y-1\cdot z=d$, *kjer* d *dobimo, ko v enačbo vstavimo koordinate točke* A. *Torej:* $0\cdot 1+1\cdot 0-1\cdot 3=d$ *in* $d=-3$. *Enačba ravnine* Π_1 *je torej* $y-z=-3$ *ali* $y-z+3=0$.
- *Normalo ravnine* Π_2 *dobimo kot vektorski produkt dveh vektorjev na ravnini. Vzemimo na primer vektorja*

$$\vec{a}=\vec{AB}=\vec{r_B}-\vec{r_A}=(-2,2,1)-(1,0,3)=(-3,2,-2),$$
$$\vec{b}=\vec{AC}=\vec{r_C}-\vec{r_A}=(5,-4,0)-(1,0,3)=(4,-4,-3).$$

Njun vektorski produkt je:

$$\vec{n_2}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 2 & -2\\ 4 & -4 & -3\end{vmatrix}=(-14,-17,4).$$

Sledi enačba $-14\cdot x-17\cdot y+4\cdot z=d$, *kjer* d *na primer dobimo, ko v enačbo vstavimo koordinate točke* A. *Torej:* $-14\cdot 1-17\cdot 0+4\cdot 3=d$ *in* $d=-2$. *Enačba ravnine* Π_2 *je torej* $-14x-17y+4z=-2$ *ali* $14x+17y-4z=2$.

- *Ker imata ravnini* Π_1 *in* Π_2 *nevzporedni normali, nista vzporedni, zato se sekata v skupni premici. Dobimo jo, tako da rešimo sistem enačb:*

$$\begin{aligned} y-z&=-3,\\ 14x+17y-4z&=2.\end{aligned}$$

Rešitev je enoparametrična:

$$\begin{aligned} x&=x,\\ y&=-\frac{14}{13}x+\frac{14}{13},\\ z&=-\frac{14}{13}x+\frac{53}{13}.\end{aligned}$$

Za presečno premico x na desni strani zamenjamo s t:

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= -\frac{14}{13}t + \frac{14}{13}, \\ z &= -\frac{14}{13}t + \frac{53}{13}. \end{aligned}$$

Naloga 2 (20 točk)

Poiščite rešitev matrične enačbe

$$AX = B + X,$$

kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \qquad \text{and} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Enačbo najprej malo preuredimo, $AX - X = B$, in dobimo $(A - I)X = B$. Z Gaussovo eliminacijo torej rešitev izračunamo takole: $[A - I|B] \rightsquigarrow [I|X]$. Vzemimo razširjeno matriko $[A - I|B]$ in jo transformirajmo (z operacijami, ki ohranjajo rang), dokler na levi strani ne dobimo identične matrike I. Na desni strani dobljene razširjene matrike bo tedaj iskana matrika X. Računajmo:

$$\begin{aligned}
[A - I|B] &= \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right] \text{ zam. 1. in 2. vrst.} \\
&= \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} v3 - v1 \\ \hline 2 \cdot v3 + 3 \cdot v2 \end{array} \\
&= \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{10}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] \begin{array}{c} v3/7 \\ \hline v2 - 3 \cdot v3 \\ \hline v1 + 3 \cdot v3 \end{array} \\
&= \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array}\right] v1 - v2
\end{aligned}$$

Rešitev:

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naloga 3 (20 točk)

Funkcijo

$$f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt$$

razvijte v Taylorjevo vrsto v okolici točke $x = 0$. Določite tudi območje konvergence.

Namig: V Taylorjevo vrsto najprej razvijte funkcijo pod integralom.

Taylorjeva vrsta funkcije $\ln(1+t)$ *v okolici točke* $t = 0$ *je enaka*

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots$$

in konvergira za $t \in (-1, 1)$. *Dobimo:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\, dt = \int_0^x \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}}{t}\, dt = \int_0^x \frac{t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots}{t}\, dt \\ &= \int_0^x (1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + \cdots)\, dt = t - \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{9} - \frac{t^4}{16} + \cdots \Big|_0^x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n^2} \Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{0^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}. \end{aligned}$$

Vrsta konvergira za $x \in (-1, 1)$*, podobno kot Taylorjeva vrsta funkcije* $\ln(1+t)$.

Naloga 4 (20 točk)

Poiščite vezane ekstreme funkcije treh spremenljivk:

$$f(x, y, z) = xyz, \quad 2x + y - z = 1.$$

Odgovor utemeljite.

Kandidati za vezane ekstreme funkcije $f(x, y, z)$ *so stacionarne točke Lagrangeove funkcije*

$$F(x, y, z; \lambda) = xyz + \lambda(2x + y - z - 1).$$

Po odvajanju dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} F'_x &= yz + 2\lambda = 0, \\ F'_y &= xz + \lambda = 0, \\ F'_z &= xy - \lambda = 0, \\ F'_\lambda &= 2x + y - z - 1 = 0. \end{aligned}$$

Ko seštejemo drugo in tretjo enačbo, dobimo $x(z+y) = 0$*, torej* $x = 0$ *ali* $z = -y$. *Ločimo* *lahko dve možnosti:*

$$
\begin{array}{c|c}
x = 0 & z = -y \\
yz + 2\lambda = 0 & -y^2 + 2\lambda = 0 \\
\lambda = 0 & -xy + \lambda = 0 \\
-\lambda = 0 & xy - \lambda = 0 \\
y - z - 1 = 0 & 2x + 2y - 1 = 0 \\
\hline
T_1(0,0,-1) & T_3(\frac{1}{2},0,0) \\
T_2(0,1,0) & T_4(\frac{1}{6},\frac{1}{3},-\frac{1}{3})
\end{array}
$$

V množici štirih kandidatov sedaj poiščemo točke, kjer doseže funkcija $f(x,y,z)$ največje oziroma najmanjše vrednosti ob danem pogoju $2x+y-z=1$ (vezane ekstreme). Izračunamo funkcijske vrednosti:

$$
\begin{aligned}
f(0,0,-1) &= 0, \\
f(0,1,0) &= 0, \\
f(\frac{1}{2},0,0) &= 0, \\
f(\frac{1}{6},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}) &= -\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{54}.
\end{aligned}
$$

Sledi, vezan maksimum funkcije $f(x,y,z)$ je enak 0; funkcija ga doseže trikrat, to je v točkah T_1, T_2 in T_3. Vezan minimum je enak $-\frac{1}{54}$; funkcija ga doseže v točki T_4.

Naloga 5 (20 točk)

Poiščite ortogonalne trajektorije enoparametrične družine krivulj $2x-y=Ce^{2y}$. Določite tudi tisto ortogonalno trajektorijo, ki gre skozi točko $T(0,1)$.

Najprej poiščimo diferencialno enačbo, katere rešitev je dana družina krivulj:

$$
\begin{aligned}
2x - y &= Ce^{2y} \quad \textit{(odvajamo)} \\
2 - y' &= Ce^{2y}\cdot 2y' \quad \textit{(iz začetne enačbe izrazimo } C\textit{)} \\
C &= \frac{2x-y}{e^{2y}} \quad \textit{(}C\textit{ vstavimo v drugo enačbo)} \\
2 - y' &= \frac{2x-y}{e^{2y}}\cdot e^{2y}\cdot 2y' \\
2 - y' &= (2x-y)\cdot 2y' \quad \textit{(izrazimo } y'\textit{)} \\
y' &= \frac{2}{4x-2y+1}
\end{aligned}
$$

Ker so ortogonalne trajektorije pravokotne na dano družino krivulj, velja $y'_T = -\frac{1}{y'}$. Dobimo diferencialno enačbo

$$y' = -\frac{4x-2y+1}{2},$$

ki je linearna diferencialna enačba 1. reda. Enačbo uredimo:

$$2y' - 2y = -4x - 1.$$

Njena splošna rešitev je sestavljena iz rešitve homogenega dela (y_h) in partikularne rešitve (y_p):

$$y = y_h + y_p.$$

a.) *Homogeni del (računamo y_h): $2y' - 2y = 0$ oziroma $y' - y = 0$. Vstavimo $y' = \frac{dy}{dx}$ in dobimo:*

$$\begin{aligned} y' - y &= 0 \\ \frac{dy}{dx} - y &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= dx \\ \int \frac{dy}{y} &= \int dx \\ \ln y &= x + \ln D \\ \ln \frac{y}{D} &= x \\ \frac{y}{D} &= e^x \\ y_h &= De^x \end{aligned}$$

b.) *Nehomogeni del (računamo y_p): $2y' - 2y = -4x - 1$. Nastavek za y_p dobimo z metodo variacije konstante:*

$$y_p = D(x)e^x.$$

Nastavek odvajamo, vstavimo v diferencialno enačbo in izračunamo $D(x)$:

$$\begin{aligned} y &= D(x)e^x \\ y' &= D'e^x + De^x \\ 2(D'e^x + De^x) - 2(De^x) &= -4x - 1 \\ 2D'e^x &= -4x - 1 \\ D'(x) &= \frac{1}{2}(-4x-1)e^{-x} \\ D(x) &= \int \frac{1}{2}(-4x-1)e^{-x}\,dx = (2x + \frac{3}{2})e^{-x} + E \end{aligned}$$

Pri integriranju smo uporabili metodo integracije po delih (per partes; $u = \frac{1}{2}(-4x-1)$ in $dv = e^{-x}dx$). Sledi partikularna rešitev:

$$y_p = D(x)e^x = 2x + \frac{3}{2}.$$

Enačba družine iskanih ortogonalnih trajektorij se zato glasi takole ($y = y_h + y_p$):

$$y = De^x + 2x + \frac{3}{2}.$$

Določimo še tisto ortogonalno trajektorijo, ki gre skozi točko $T(0,1)$*:*

$$\begin{aligned} y &= De^x + 2x + \frac{3}{2} \\ 1 &= De^0 + 2 \cdot 0 + \frac{3}{2} \\ 1 &= D + \frac{3}{2} \\ D &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Torej $y = -\frac{1}{2}e^x + 2x + \frac{3}{2}$.