IZPIT IZ MATEMATIKE II

Univerzitetni študij

6. februar 2012

1. Izračunajte prostornino piramide, ki jo napenjajo vektorji $\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$, $2\vec{a}-\vec{b}+4\vec{c}$ in $3\vec{a}+2\vec{b}-5\vec{c}$, če je prostornina piramide, ki jo napenjajo vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ enaka 1.

   Rešitev:

   Volumen piramide: $((\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 6)$

$$
\begin{aligned}
V_{pir} &= \frac{1}{6}\Big(((\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}) \times (2\vec{a}-\vec{b}+4\vec{c}))\cdot(3\vec{a}+2\vec{b}-5\vec{c})\Big)\\
&= \frac{1}{6}\Big((-3\vec{a}\times\vec{b}+8\vec{a}\times\vec{c}+2\vec{b}\times\vec{c})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b}-5\vec{c})\Big)\\
&= \frac{1}{6}\Big(6(\vec{a},\vec{b},\vec{c})-16(\vec{a},\vec{b},\vec{c})+15(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\Big)\\
&= \frac{1}{6}\cdot 5(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 5
\end{aligned}
$$

2. Določite lastne vrednosti matrike

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.
$$

   Določite še lastni vektor, ki pripada lastni vrednost 1.

   Rešitev:

   Lastne vrednosti:

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & -1 \\ -3 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}\\
&= (3-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)+2+3(-1-\lambda)+2(3-\lambda)\\
&= (-3-2\lambda+\lambda^2)(1-\lambda)+5(1-\lambda)\\
&= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda+2)
\end{aligned}
$$

   Sledi: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+\mathrm{i}$ in $\lambda_3 = 1-\mathrm{i}$. Da določimo lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 1, reduciramo matriko

$$
A-I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

   Od tod sledi, da je lastni vektor

$$
x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}.
$$

3. Določite in narišite definicijsko območje funkcije

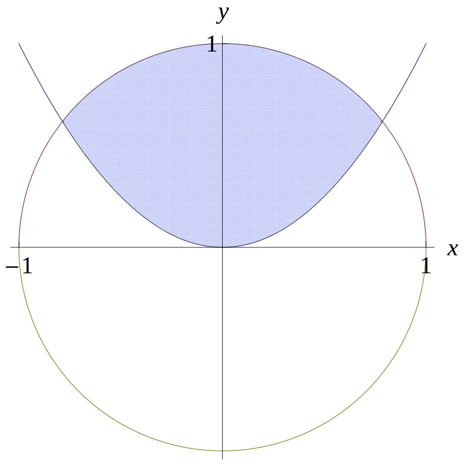
$$f(x,y) = \sqrt{y - x^2} + \arcsin(x^2 + y^2).$$

Določite še totalni diferencial funkcije $f(x,y)$.

Rešitev:

Definicijsko območje dobimo iz pogojev $y - x^2 \geq 0$ in $-1 \leq x^2 + y^2 \leq 1$:

$$\mathcal{D}_f = \{(x,y) | y \geq x^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



Totalni diferencial:

$$\begin{aligned}
f_x &= \frac{-x}{\sqrt{y - x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}, \\
f_y &= \frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} + \frac{2y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}}, \\
\mathrm{d}f &= \left(\frac{-x}{\sqrt{y - x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}} \right) \mathrm{d}x + \left(\frac{1}{2\sqrt{y - x^2}} + \frac{2y}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)^2}} \right) \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

4. Rešite diferencialno enačbo

$$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

Poiščite tisto rešitev, ki gre skozi točko $T(3,4)$. Kot znano uporabite enakost

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + C.$$

Rešitev:

To je homogena diferencialna enačba. Najprej jo delimo z x in uvedemo novo spremenljivko

$u = \frac{y}{x}$ in $y' = u + xu'$, da dobimo diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama.

$$\begin{aligned}
xy' &= \sqrt{x^2+y^2} + y \\
y' &= \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x} \\
u + xu' &= \sqrt{1+u^2} + u \\
\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} &= \int \frac{dx}{x} \\
\ln u + \sqrt{1+u^2} &= \ln x + \ln C \\
u + \sqrt{1+u^2} &= Cx \\
y + \sqrt{x^2+y^2} &= Cx^2
\end{aligned}$$

Vstavimo še začetni pogoj in dobimo $C = \frac{8}{9}$. Sledi:

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = \tfrac{8}{9}x^2.$$

5. Poiščite rešitev diferencialne enačbe

$$y'' - 2y' - 3y = 8\mathrm{e}^{-x},$$

ki zadošča začetnim pogojem $y(0) = 0$ in $y'(0) = 2$.

Rešitev:
To je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

(i) Homogeni del:

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Uporabimo nastavek $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$, kar nam da dve rešitvi, in sicer $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = 3$:

$$y_H = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{3x}.$$

(ii) Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka $y_p = Cx\mathrm{e}^{-x}$. Odvajamo in dobimo $y_p' = C\mathrm{e}^{-x} - Cx\mathrm{e}^{-x}$ in $y_p'' = -2C\mathrm{e}^{-x} + Cx\mathrm{e}^{-x}$. Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$-2C\mathrm{e}^{-x} + Cx\mathrm{e}^{-x} - 2C\mathrm{e}^{-x} + 2Cx\mathrm{e}^{-x} - 3Cx\mathrm{e}^{-x} = 8\mathrm{e}^{-x}.$$

Primerjava koeficientov nam da $C = -2$, zato je $y_p = -2x\mathrm{e}^{-x}$.

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{3x} - 2x\mathrm{e}^{-x}.$$

Vstavimo še začetne pogoje v splošno rešitev in njen odvod

$$y'(x) = -A\mathrm{e}^{-x} + 3B\mathrm{e}^{3x} - 2\mathrm{e}^{-x} + 2x\mathrm{e}^{-x},$$

da dobimo sistem enačb $A + B = 0$ in $-A + 3B - 2 = 2$, ki ima rešitev $A = -1$ in $B = 1$. Rešitev začetnega problema:

$$y(x) = -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{3x} - 2x\mathrm{e}^{-x}.$$