

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

18. januar 2006

1. [20T] Izračunaj vse lastne vrednosti matrike

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj tudi lastni vektor, ki pripada najmanjši lastni vrednosti.

Rešitev:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 & 2 \\ 1 & 4 - \lambda & 1 \\ -2 & -4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)(4 - \lambda)(-1 - \lambda) - 4 - 8 + 2(1 + \lambda) \\ &\quad + 4(3 - \lambda) + 4(4 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Zadnjo enakost dobimo s pomočjo Hornerjevega algoritma. Lastne vrednosti so torej $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ in $\lambda_3 = 3$. Najmanjša lastna vrednost je $\lambda_1 = 1$. Izračunajmo sedaj še lastni vektor za lastno vrednost 1.

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 1, je torej $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

2. [20T] Določi vrednost parametra a tako, da bo sistem rešljiv. Sistem nato še reši.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 1 \\ x + 2y - z &= 2 \\ x + 7y - 4z &= a \end{aligned}$$

Rešitev:

Zapišimo sistem s pomočjo matrike:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & a \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & a-2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right]$$

Da bo sistem rešljiv, mora biti $a - 5 = 0$, torej $a = 5$.

Sedaj pa še rešimo sistem. Ker je rang matrike enak 2, število neznank pa 3, imamo 1-parametrično družino rešitev.

Za parameter vzamemo z . Iz enačbe $-5y + 3z = -3$ dobimo $y = \frac{3z+3}{5}$, iz enačbe $x + 2y - z = 2$ pa $x = \frac{4-z}{5}$. Torej:

$$\begin{aligned} z &= \textit{konst}, \\ y &= \frac{3z+3}{5}, \\ x &= \frac{4-z}{5}. \end{aligned}$$

3. [20T] Zapiši prve 4 člene razvoja funkcije

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{7+x}}$$

v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 1$.

Rešitev:

Vzamemo novo spremenljivko $y = x - 1$, torej $x = y + 1$.

Uporabimo binomsko formulo:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad |x| < 1.$$

Funkcijo razvijemo okrog $a = 0$ in razvoj se glasi ($\alpha = -\frac{1}{3}$, $x = \frac{y}{8}$):

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{\sqrt[3]{8+y}} = (8+y)^{-\frac{1}{3}} = 8^{-\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{y}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\binom{-\frac{1}{3}}{0} + \binom{-\frac{1}{3}}{1} \cdot \frac{y}{8} + \binom{-\frac{1}{3}}{2} \cdot \frac{y^2}{64} + \binom{-\frac{1}{3}}{3} \cdot \frac{y^3}{512} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y}{24} + \frac{y^2}{192} - \frac{7y^3}{20736} \right) \end{aligned}$$

Torej je

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x-1}{24} + \frac{(x-1)^2}{192} - \frac{7(x-1)^3}{20736} \right).$$

4. [20T] Poišči rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} xy'(x) + (1+x)y(x) &= e^{-x}, \\ y(-1) &= e. \end{aligned}$$

Rešitev:

Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

- Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned} xy' &= -(1+x)y \\ \int \frac{dy}{y} &= - \int \frac{1+x}{x} dx \\ \ln y &= -\ln|x| - x + \ln C \\ y &= \frac{Ce^{-x}}{x} \end{aligned}$$

- Nehomogeni del rešimo s pomočjo variacije konstante.

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{C(x)e^{-x}}{x} \\ y'(x) &= \frac{C'(x)e^{-x}x - C(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}}{x^2} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$\frac{C'(x)e^{-x}x - C(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}}{x} + \frac{C(x)e^{-x}x + C(x)e^{-x}}{x} = e^{-x}.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} \frac{C'(x)e^{-x}x}{x} &= e^{-x} \\ C(x) &= \int dx \\ C(x) &= x + D \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{(x+D)e^{-x}}{x} \end{aligned}$$

Upoštevajmo sedaj še začetni pogoj.

$$e = y(-1) = \frac{(-1 + D)e}{-1} \Rightarrow D = 0$$

Rešitev začetnega problema se torej glasi:

$$y(x) = e^{-x}.$$

5. [20T] Reši diferencialno enačbo

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 4e^{-2x}.$$

Rešitev:

Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

- Rešimo najprej homogeni del:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Uporabimo nastavek $y = e^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Ta polinom razstavimo in dobimo $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, kar nam da dve rešitvi, in sicer $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 2$. Homogeni del rešitve se tako glasi:

$$y_H = Ae^x + Be^{2x}$$

- Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka, ki se glasi $y_p = Ce^{-2x}$. Odvajamo in dobimo $y'_p = -2Ce^{-2x}$ in $y''_p = 4Ce^{-2x}$. To vstavimo v enačbo:

$$4Ce^{-2x} + 6Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} = 4e^{-2x}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

Dobimo partikularno rešitev:

$$y_p = \frac{1}{3}e^{-2x}.$$

$$\Rightarrow y(x) = y_H + y_p = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{3}e^{-2x}$$