IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

16. januar 2007

1. Izračunaj ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $2\vec{a}+5\vec{b}$ in $\vec{a}-3\vec{b}$, če je $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa je $\frac{\pi}{6}$.

   Ploščino paralelograma, ki ga napenjata vektorja $2\vec{a}+5\vec{b}$ in $\vec{a}-3\vec{b}$ izračunamo po formuli:

   $$p_{par} = |(2\vec{a}+5\vec{b})\times(\vec{a}-3\vec{b})|.$$

   Najprej izračunajmo vektorski produkt:

   $$(2\vec{a}+5\vec{b})\times(\vec{a}-3\vec{b}) = 2\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{=0}+5\underbrace{\vec{b}\times\vec{a}}_{=-\vec{a}\times\vec{b}}-6\vec{a}\times\vec{b}-15\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{=0} = -11\vec{a}\times\vec{b}$$

   Ploščina paralelograma je sedaj:

   $$p_{par} = |-11\vec{a}\times\vec{b}| = 11\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi = 11\cdot 2\cdot 3\cdot\sin\frac{\pi}{6} = 33.$$

   Upoštevali smo formulo:

   $$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi,$$

   kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

2. Razvij funkcijo $f(x)=\mathrm{arctg}x$ v Taylorjevo vrsto v okolici točke $x_0=0$.

   Funkcijo $f(x)$ najprej odvajamo:

   $$g(x) = f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

   Nato odvod s pomočjo geometrijske vrste razvijmo v Taylorjevo vrsto okrog $x_0=0$:

   $$g(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2x}.$$

Ker je $f(x) = \int g(x)\mathrm{d}x + C$, dobimo Taylorjevo vrsto za $f(x)$ tako, da vrsto za $g(x)$ členoma integriramo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2x} \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^{2x} \mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + C \end{aligned}$$

Ko vstavimo $x = 0$ v to enačbo, dobimo, da je $C = 0$. Torej:

$$\mathrm{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Območje konvergence te vrste je enako območju konvergence geometrijske vrste: $|x| < 1$.

3. Določi lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) = 3x^3 + 3y^3 - 3xy$.

Najprej izračunamo prva parcialna odvoda:

$$\begin{aligned} f_x &= 9x^2 - 3y, \\ f_y &= 9y^2 - 3x. \end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba odvoda enaka 0. Rešiti je potrebno sistem enačb $3x^2 = y$ in $3y^2 = x$. Če prvo enačbo vstavimo v drugo, dobimo enačbo: $27x^4 = x$. Razstavimo in dobimo: $x(3x - 1)(9x^2 + 3x + 1) = 0$. Sledi: $x_1 = 0$ in $x_2 = \frac{1}{3}$, torej $y_1 = 0$ in $y_2 = \frac{1}{3}$. Imamo dve stacionarni točki: $T_1(0, 0)$ in $T_2(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
Sedaj izračunajmo druge parcialne odvode: $f_{xx} = 18x$, $f_{yy} = 18y$ in $f_{xy} = -3$. Hessejeva matrika funkcije f je tako:

$$H_f = \begin{bmatrix} 18x & -3 \\ -3 & 18y \end{bmatrix}.$$

Za vsako stacionarno točko sedaj izračunajmo vrednost determinante Hessejeve matrike v tej točki:

$$\det H_f(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$$

Torej je v točki $T_1(0,0)$ sedlo.

$$\det H_f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0$$

Ker je poleg tega tudi $f_{xx}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = 6 > 0$, je v točki $T_2(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ minimum.

4. Reši diferencialno enačbo

$$y'' + 3y' - 4y = 5\sin 2x$$

skupaj z začetnimi pogoji $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$.

Najprej rešimo homogeni del: $y'' + 3y' - 4y = 0$. Uporabimo nastavek $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ ($y' = \lambda\mathrm{e}^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x}$) in dobimo enačbo: $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$. Razstavimo: $(\lambda - 1)(\lambda + 4) = 0$ in dobimo rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -4$. Torej je rešitev homogenega dela:

$$y_H = A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-4x}.$$

Poiščimo še partikularno rešitev, ki ima nastavek:

$$\begin{aligned} y_p &= C\sin 2x + D\cos 2x \\ y_p' &= 2C\cos 2x - 2D\sin 2x \\ y_p'' &= -4C\sin 2x - 4D\cos 2x \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$\begin{aligned} -4C\sin 2x - 4D\cos 2x + 6C\cos 2x & \\ -6D\sin 2x - 4C\sin 2x - 4D\cos 2x &= 5\sin 2x \\ (-8C - 6D)\sin 2x + (6C - 8D)\cos 2x &= 5\sin 2x \end{aligned}$$

Dobimo sistem enačb $6C - 8D = 0$, $-8C - 6D = 5$, ki ima rešitev $C = -\frac{2}{5}$ in $D = -\frac{3}{10}$. Partikularna rešitev je torej:

$$y_p = -\frac{2}{5}\sin 2x - \frac{3}{10}\cos 2x.$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = -\frac{2}{5}\sin 2x - \frac{3}{10}\cos 2x + A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{-4x}.$$

Upoštevajmo še začetne pogoje:

$$y'(x) = -\frac{4}{5}\cos 2x + \frac{3}{5}\sin 2x + A\mathrm{e}^{x} - 4B\mathrm{e}^{-4x}$$

Dobimo sistem enačb:

$$\begin{aligned} y(0) &= -\frac{3}{10} + A + B = 0 \\ y'(0) &= -\frac{4}{5} + A - 4B = 1 \end{aligned}$$

Ta sistem ima rešitev $A = \frac{3}{5}$, $B = -\frac{3}{10}$, zato je rešitev začetnega problema:

$$y(x) = -\frac{2}{5}\sin 2x - \frac{3}{10}\cos 2x + \frac{3}{5}\mathrm{e}^{x} - \frac{3}{10}\mathrm{e}^{-4x}.$$

5. Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - y, \\ \dot{y} &= -2x + 4y, \end{aligned}$$

kjer sta $x = x(t)$ in $y = y(t)$ funkciji parametra t.

Sistem rešimo z nastavkoma: $x = Ae^{\lambda t}$ in $y = Be^{\lambda t}$. Odvajamo in dobimo: $\dot{x} = \lambda A e^{\lambda t}$ in $\dot{y} = \lambda B e^{\lambda t}$. To vstavimo v enačbi ter po deljenju z $e^{\lambda t}$ in ureditvi enačb dobimo homogen sistem:

$$\begin{aligned} (\lambda - 3)A + B &= 0, \\ 2A + (\lambda - 4)B &= 0. \end{aligned}$$

Ta sistem ima netrivialno rešitev, ko je determinanta matrike koeficientov enaka 0.

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5) = 0$$

To nam da dve rešitvi: $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 5$. Za vsako poiščemo rešitev.
Za $\lambda_1 = 2$ dobimo iz enačbe $B = A$ in zato $x_1 = A_1 e^{2t}$ in $y_1 = A_1 e^{2t}$.
Za $\lambda_2 = 5$ dobimo iz enačbe $B = -2A$ in zato $x_2 = A_2 e^{5t}$ in $y_2 = -2A_2 e^{5t}$.
Rešitev sistema diferencialnih enačb je potem ($x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$):

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 e^{2t} + A_2 e^{5t}, \\ y(t) &= A_1 e^{2t} - 2A_2 e^{5t}. \end{aligned}$$