

## IZPIT IZ MATEMATIKE 2

### Univerzitetni študij

15. januar 2008

1. Ali točke  $A(2, 1, -3)$ ,  $B(1, -1, 2)$ ,  $C(3, 0, -7)$  in  $D(1, -4, 3)$  ležijo v isti ravnini?

**Rešitev:** Najprej zapišemo tri vektorje:

$$\vec{a} = \vec{AB} = (-1, -2, 5),$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = (1, -1, -4),$$

$$\vec{c} = \vec{AD} = (-1, -5, 6).$$

Točke  $A$ ,  $B$ ,  $C$  in  $D$  ležijo v isti ravnini, ko so vektorji  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  in  $\vec{c}$  komplanarni, torej ko je mešani produkt  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$ .

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \\ -1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 8 - 25 - 5 + 20 + 12 = 0$$

Točke ležijo v isti ravnini.

2. Določite parameter  $a$  tako, da bo sistem

$$2x - y + z + w = 1$$

$$x + 2y - z + 4w = 2$$

$$x + 7y - 4z + 11w = a$$

rešljiv. Za to vrednost parametra  $a$  sistem tudi rešite.

**Rešitev:** Sestavimo razširjeno matriko koeficientov:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array} \right] &\sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & a \end{array} \right] \\ &\sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & a-2 \end{array} \right] \\ &\sim \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Sistem je rešljiv, ko sta ranga razširjene in osnovne matrike koeficientov enaka, torej ko je  $a - 5 = 0$ , oz. ko je  $a = 5$ .

V tem primeru dobimo 2-parametrično družino rešitev:

$$\begin{aligned}x &= -\frac{1}{5}z - \frac{6}{5}w + \frac{4}{5} \\y &= \frac{3}{5}z - \frac{7}{5}w + \frac{3}{5} \\z &= \text{polj.} \\w &= \text{polj.}\end{aligned}$$

3. Poiščite minimum funkcije

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2$$

pri pogoju  $x^3 + y^3 = 2$ .

**Rešitev:** Sestavimo razširjeno funkcijo

$$F(x, y, \lambda) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + \lambda(x^3 + y^3 - 2),$$

ki jo nato odvajamo po vseh treh spremenljivkah.

$$\begin{aligned}F_x &= 6x - 2y + 3\lambda x^2 = 0 \\F_y &= -2x + 6y + 3\lambda y^2 = 0 \\F_\lambda &= x^3 + y^3 - 2 = 0\end{aligned}$$

Stacionarno točko dobimo, ko so vsi odvodi enaki 0. Če prvo enačbo množimo z  $y^2$ , drugo z  $-x^2$  ter ju seštejemo, dobimo

$$2(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3) = 0,$$

oziroma  $2(x - y)^3 = 0$ , kar nam da  $x = y$ . Ko to vstavimo v tretjo enačbo, dobimo  $2x^3 = 2$  in zato  $x = 1$  in  $y = 1$ .

Torej imamo v točki  $T(1, 1)$  minimum ( $f(1, 1) = 4$ ).

4. Poiščite rešitev diferencialne enačbe

$$(x^2 - 1)y' + 2xy - 3x^2 + 1 = 0,$$

skupaj z začetnim pogojem  $y(2) = 3$ .

**Rešitev:** To je linearna diferencialna enačba. Najprej rešimo homogeni del z ločitvijo spremenljivk:

$$\begin{aligned}(x^2 - 1)y' + 2xy &= 0 \\ y' &= -\frac{2xy}{x^2 - 1} \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{2xdx}{x^2 - 1} \\ \ln y &= -\ln(x^2 - 1) + \ln C \\ y_H &= \frac{C}{x^2 - 1}\end{aligned}$$

Pri tem smo integral

$$\int \frac{2xdx}{x^2 - 1} = \int \frac{dt}{t} = \ln t = \ln(x^2 - 1)$$

izračunali s pomočjo uvedbe nove spremenljivke  $t = x^2 - 1$  in  $dt = 2xdx$ . Partikularno rešitev poiščemo z variacijo konstante:

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{C(x)}{x^2 - 1} \\ y'(x) &= \frac{C'(x)(x^2 - 1) - 2xC(x)}{(x^2 - 1)^2}\end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo:

$$C'(x) - \frac{2xC(x)}{x^2 - 1} + \frac{2xC(x)}{x^2 - 1} = 3x^2 - 1.$$

Dobimo:

$$C(x) = \int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + D.$$

Torej je splošna rešitev:

$$y(x) = x + \frac{D}{x^2 - 1}.$$

Sedaj vstavimo še začetni pogoj:  $y(2) = 2 + \frac{D}{3} = 3$ , od koder sledi  $D = 3$ .

Iskana rešitev je torej:

$$y(x) = x + \frac{3}{x^2 - 1}.$$

5. Rešite diferencialno enačbo

$$y'' + 2y' + 5y = e^{3x}.$$

**Rešitev:** To je linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti. Homogeni del rešimo z nastavkom  $y = e^{\lambda x}$ . Dobimo karakteristično enačbo  $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ , ki ima dve kompleksni rešitvi:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i.$$

Zato je homogeni del rešitve enak:

$$y_H = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Partikularni del poiščemo z nastavkom  $y_p = Ce^{3x}$ . Nastavek s pripadajočimi odvodi ( $y_p' = 3Ce^{3x}$ ,  $y_p'' = 9Ce^{3x}$ ) vstavimo v enačbo in dobimo:

$$9Ce^{3x} + 6Ce^{3x} + 5Ce^{3x} = e^{3x}.$$

Sledi:  $20C = 1$ , oz.  $C = \frac{1}{20}$  in zato je partikularna rešitev enaka:

$$y_p = \frac{1}{20}e^{3x}.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe se tedaj glasi:

$$y(x) = \frac{1}{20}e^{3x} + e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x).$$