

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

23. junij 2006

1. [20T] Izračunaj razdaljo med premicama

$$x - 1 = 2y = z + 1$$

in

$$x + 1 = 2y = z - 3.$$

Rešitev:

Smerna vektorja premic: $\vec{e}_1 = (1, \frac{1}{2}, 1)$ in $\vec{e}_2 = (1, \frac{1}{2}, 1)$ sta enaka, kar pomeni, da sta premici vzporedni. Razdaljo tako izračunamo kot razdaljo ene točke na eni premici do druge premice. Začetni točki na premicah sta: $T_1(1, 0, -1)$ in $T_2(-1, 0, 3)$. Označimo $\vec{r} = \vec{T_1T_2} = (-2, 0, 4)$. Razdaljo izračunamo s pomočjo formule

$$d = \frac{|\vec{e}_1 \times \vec{r}|}{|\vec{e}_1|}.$$

Izračunajmo najprej vektorski produkt:

$$\vec{e}_1 \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (2, -6, 1).$$

Sledi: $|\vec{e}_1 \times \vec{r}| = \sqrt{41}$ in $|\vec{e}_1| = \frac{3}{2}$. Torej je razdalja med premicama enaka:

$$d = \frac{2\sqrt{41}}{3}.$$

2. [20T] Dokaži, da tvorijo vektorji

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

bazo prostora \mathbb{R}^3 . Razvij vektor $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ po tej bazi.

Rešitev:

Najprej pokažimo, da so vektorji linearno neodvisni.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Ker je determinanta matrike, ki je sestavljena iz vektorjev x_1, x_2 in x_3 različna od 0, so ti vektorji linearno neodvisni. Ker jih je dovolj (so trije), tvorijo bazo prostora \mathbb{R}^3 .

Vektor y želimo zapisati v obliki:

$$y = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3,$$

kjer iščemo koeficiente α, β in γ . To nam da sistem enačb

$$\begin{aligned} \alpha + 3\beta + 2\gamma &= 3 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma &= 7 \\ \alpha + \beta + 2\gamma &= 1 \end{aligned}$$

Ta sistem ima rešitev, ker se da vsak vektor zapisati kot linearno kombinacijo baznih vektorjev. Rešitev poiščemo z Gaussovo eliminacijo. Dobimo: $\alpha = 2, \beta = 1$ in $\gamma = -1$. Torej:

$$y = 2x_1 + x_2 - x_3.$$

3. [20T] Funkcijo Razvij funkcijo $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9+x}}$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 0$.

Rešitev:

Uporabili bomo razvoj v binomsko vrsto okrog točke 0:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad |x| < 1.$$

Razvijemo funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{\sqrt{x+9}} = x(x+9)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3}x \left(1 + \frac{x}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \left(\text{binomska vrsta z } \alpha = -\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}x \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \left(\frac{x}{9}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2n+1}} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{n+1}. \end{aligned}$$

4. [20T] Poišči lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2.$$

Rešitev:

Izračunajmo najprej prve parcialne odvode:

$$\begin{aligned}f_x &= 3x^2 - 8x + 2y \\f_y &= 2x - 2y\end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Torej moramo rešiti sistem:

$$\begin{aligned}3x^2 - 8x + 2y &= 0 \\2x - 2y &= 0\end{aligned}$$

Iz druge enačbe dobimo $y = x$. To vstavimo v prvo enačbo in dobimo $3x^2 - 6x = 0$. To lahko delimo s 3 in razstavimo ter dobimo $x(x-2) = 0$. Ta enačba ima dve rešitvi, in sicer $x_1 = 0$ in $x_2 = 2$. To nam da $y_1 = 0$ in $y_2 = 2$. Dobimo dve stacionarni točki: $T_1(0, 0)$ in $T_2(2, 2)$.

Izračunajmo sedaj še druge parcialne odvode:

$$\begin{aligned}f_{xx} &= 6x - 8 \\f_{yy} &= -2 \\f_{xy} &= 2.\end{aligned}$$

Torej se Hessejeva matrika funkcije f glasi:

$$Hf = \begin{bmatrix} 6x - 8 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Oglejmo si sedaj determinanto te matrike v obeh stacionarnih točkah.

•

$$\det Hf(0, 0) = \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

$$\begin{aligned}f_{xx}(0, 0) &= -8 < 0 \\ \Rightarrow \text{V točki } T_1(0, 0) &\text{ imamo maksimum.}\end{aligned}$$

•

$$\det Hf(2, 2) = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12 < 0$$

$$\Rightarrow \text{V točki } T_2(2, 2) \text{ imamo sedlo.}$$

5. [20T] Poišči rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned}xy'(x) + 3y(x) &= x^3y^2(x), \\y(1) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Rešitev:

Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je Bernoullijeva diferencialna enačba. Najprej jo delimo z y^2 , da jo prevedemo v pravilno obliko:

$$xy^{-2}y' + 3y^{-1} = x^3.$$

Sedaj uvedemo novo spremenljivko: $z = y^{-1}$ in $z' = -y^{-2}y'$, da dobimo:

$$-xz' + 3z = x^3,$$

kar je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

- Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned}xz' &= 3z \\ \int \frac{dz}{z} &= 3 \int \frac{dx}{x} \\ \ln z &= 3 \ln x + \ln C \\ z &= Cx^3\end{aligned}$$

- Nehomogeni del rešimo s pomočjo variacije konstante.

$$\begin{aligned}z(x) &= C(x)x^3 \\ z'(x) &= C'(x)x^3 + 3C(x)x^2\end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$-C'(x)x^4 - 3C(x)x^3 + 3C(x)x^3 = x^3.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}C'(x) &= -x^{-1} \\ C(x) &= -\int \frac{dx}{x} \\ C(x) &= -\ln x + D \\ \Rightarrow z(x) &= -x^3 \ln x + Dx^3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{-x^3 \ln x + Dx^3}$$

Upoštevajmo sedaj še začetni pogoj.

$$\frac{1}{2} = y(1) = \frac{1}{-\ln 1 + D}$$

Ker je $\ln 1 = 0$ je $D = 2$. Rešitev začetnega problema se torej glasi:

$$y(x) = \frac{1}{-x^3 \ln x + 2x^3}$$