

## IZPIT IZ MATEMATIKE 2

### Univerzitetni študij

21. junij 2007

1. Poišči enačbo premice, ki gre skozi težišče trikotnika  $ABC$ , in je pravokotna na ravnino trikotnika z oglišči

$$A(0, 1, 0), \quad B(-1, 0, 2) \quad \text{in} \quad C(2, 2, -1).$$

#### Rešitev:

Krajevni vektor težišča trikotnika dobimo iz krajevnih vektorjev oglišč trikotnika po formuli:

$$\vec{r}_T = \frac{1}{3}(\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C).$$

Težišče ima torej koordinate:  $T(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3})$ .

Smerni vektor premice je vzporeden normali ravnine, na kateri leži trikotnik.

Določimo dva vektorja:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{AB} = (-1, -1, 2), \\ \vec{b} &= \vec{AC} = (2, 1, -1).\end{aligned}$$

Normala je vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1, 3, 1).$$

Enačba premice je torej

$$\vec{r} = \left(\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3}\right) + t(-1, 3, 1),$$

oziroma

$$\frac{x - \frac{1}{3}}{-1} = \frac{y - 1}{3} = \frac{z - \frac{1}{3}}{1}.$$

2. Izračunaj inverz matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Rešitev:** Inverz izračunamo z Gaussovo eliminacijo.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & -4 & 1 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Sledi:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 6 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Razvij funkcijo

$$f(x) = \frac{3x - 14}{x^2 - 11x + 24}$$

v Taylorjevo vrsto okrog točke  $x_0 = 2$ .

**Rešitev:**

Najprej uvedemo novo spremenljivko  $y = x - 2$  oz.  $x = y + 2$  in zapišemo novo funkcijo

$$g(y) = \frac{3(y+2) - 14}{(y+2)^2 - 11(y+2) + 24} = \frac{3y - 8}{y^2 - 7y + 6}.$$

To funkcijo razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog točke  $x_0 = 0$  z uporabo geometrijske vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

Najprej razbijemo funkcijo na parcialne ulomke:

$$g(y) = \frac{3y - 8}{(y-1)(y-6)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-6} = \frac{(A+B)y - 6A - B}{(y-1)(y-6)}.$$

Dobimo sistem enačb:  $A + B = 3$  in  $-6A - B = -8$ , ki ima rešitev  $A = 1$  in  $B = 2$ . Dalje je

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{1}{y-1} + \frac{2}{y-6} = -\frac{1}{1-y} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{y}{6}} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} y^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{y}{6}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6^n}\right) y^n. \end{aligned}$$

Vstavimo obratno substitucijo in dobimo razvoj funkcije  $f(x)$  v Taylorjevo vrsto okrog točke  $x_0 = 2$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6^n}\right) (x-2)^n.$$

4. Reši diferencialno enačbo

$$2y''' - \frac{3}{x}y'' = x^2.$$

**Rešitev:**

Najprej znižamo red diferencialne enačbe z uvedbo nove spremenljivke:  $u = y''$  in  $u' = y'''$ .

Dobimo linearno enačbo prvega reda

$$2u' - \frac{3}{x}u = x^2.$$

(i) Homogeni del.

$$\begin{aligned} 2u' - \frac{3}{x}u &= 0 \\ \int \frac{du}{u} &= \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x} \\ \ln u &= \frac{3}{2} \ln x + \ln C \\ u_H &= Cx^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

(ii) Nehomogeni del rešimo z variacijo konstante.

$$\begin{aligned} u &= C(x)x^{\frac{3}{2}} \\ u' &= C'(x)x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}C(x)x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$2C'(x)x^{\frac{3}{2}} + 3C(x)x^{\frac{1}{2}} - 3C(x)x^{\frac{1}{2}} = x^2.$$

Sledi:

$$\begin{aligned}C'(x) &= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \\C(x) &= \int \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

Partikularna rešitev:

$$u_p = \frac{1}{3}x^3.$$

Splošna rešitev:

$$u(x) = u_p + u_H = \frac{1}{3}x^3 + Cx^{\frac{3}{2}}.$$

To rešitev sedaj še dvakrat integriramo:

$$\begin{aligned}y' &= \int \left( \frac{1}{3}x^3 + Cx^{\frac{3}{2}} \right) dx = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{5}Cx^{\frac{5}{2}} + D, \\y &= \int \left( \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{5}Cx^{\frac{5}{2}} + D \right) dx = \frac{1}{60}x^5 + \frac{4}{35}Cx^{\frac{7}{2}} + Dx + E.\end{aligned}$$

5. Reši diferencialno enačbo

$$y'' + 2y' + 5y = 2e^{3x}$$

skupaj z začetnima pogojevma  $y(0) = \frac{11}{10}$  in  $y'(0) = \frac{33}{10}$ .

**Rešitev:**

To je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

(i) Homogeni del:

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Uporabimo nastavek  $y = e^{\lambda x}$  in dobimo karakteristični polinom  $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ . Ta kvadratna enačba ima dve konjugirano kompleksni rešitvi  $\lambda_1 = -1 + 2i$  in  $\lambda_2 = -1 - 2i$ .

$$\Rightarrow y_H = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$$

(ii) Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka  $y_p = Ce^{3x}$ . Odvajamo in dobimo  $y'_p = 3Ce^{3x}$  in  $y''_p = 9Ce^{3x}$ . To vstavimo v enačbo:

$$9Ce^{3x} + 6Ce^{3x} + 5Ce^{3x} = 2e^{3x}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{10}e^{3x}$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = \frac{1}{10}e^{3x} + e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x).$$

Začetni pogoji:

$$y'(x) = \frac{3}{10}e^{3x} - e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x) + e^{-x}(-2A \sin 2x + 2B \cos 2x)$$

$$y(0) = A + \frac{1}{10} = \frac{11}{10} \quad \Rightarrow A = 1$$

$$y'(0) = -A + 2B + \frac{3}{10} = \frac{33}{10} \quad \Rightarrow B = 2$$

Rešitev, ki ustreza začetnim pogojem:

$$y(x) = \frac{1}{10}e^{3x} + e^{-x}(\cos 2x + 2 \sin 2x).$$