IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

11. junij 2008

1. Izračunaj volumen in višino na oglišče D tristrane piramide z oglišči $A(1,2,1)$, $B(2,3,1)$, $C(-1,2,0)$ in $D(2,4,3)$.

   Rešitev:

   Najprej zapišemo tri vektorje:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{AB} = (1,1,0), \\
\vec{b} &= \vec{AC} = (-2,0,-1), \\
\vec{c} &= \vec{AD} = (1,2,2).
\end{aligned}
$$

   Izračunamo mešani produkt

$$
(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 5
$$

   Volumen tristrane piramide je torej $V = \frac{1}{6}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = \frac{5}{6}$.
   Iz geometrije vemo, da je volumen piramide enak

$$
V = \frac{1}{3}\mathcal{O}v
$$

   Osnovna ploskev je trikotnik, katerega ploščina je $\mathcal{O} = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$, ker je vektorski produkt

$$
\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,1,2)
$$

   Zato je višina na oglišče D:

$$
v = \frac{3V}{\mathcal{O}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}
$$

2. Določi parameter a tako, da bo 1 lastna vrednost matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & a & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:

Da bo 1 lastna vrednost matrike A, mora biti $\det(A - I) = 0$.

$$\det(A - I) = \begin{bmatrix} 0 & a & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 4 & a & -2 \end{bmatrix} = 4a - 6a + 16 - 6a = 16 - 8a = 0$$

Od tod sledi, da je $a = 2$.

3. Poišči tisto točko na krivulji

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0,$$

ki je od točke $T(-2, -1)$ najmanj oddaljena.

Rešitev:

Iskana točka naj ima koordinate (x, y). Razdalja med dvema točkama se izračuna s formulo

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y + 1)^2}$$

Minimiziramo funkcijo razdalje, oz. kvadrata razdalje:

$$f(x, y) = (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = x^2 + 4x + y^2 + 2y + 5$$

Sestavimo razširjeno funkcijo

$$F(x, y, \lambda) = x^2 + 4x + y^2 + 2y + 5 + \lambda(x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1),$$

ki jo nato odvajamo po vseh treh spremenljivkah:

$$\begin{aligned} F_x &= 2x + 4 + 2\lambda x - 2\lambda = 0 \\ F_y &= 2y + 2 + 2\lambda y - 4\lambda = 0 \\ F_\lambda &= x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0 \end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer so vsi odvodi enaki 0. Iz prve enačbe izrazimo $x = \frac{\lambda-2}{\lambda+1}$, iz druge pa $y = \frac{2\lambda-1}{\lambda+1}$ in vstavimo v tretjo enačbo:

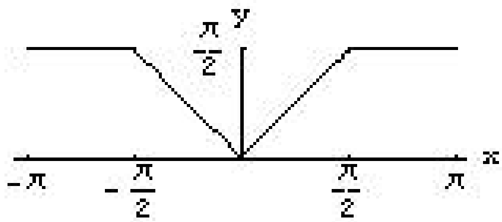
$$\frac{\lambda^2 - 4\lambda + 4}{(\lambda + 1)^2} - \frac{2\lambda - 4}{\lambda + 1} + \frac{4\lambda^2 - 4\lambda + 1}{(\lambda + 1)^2} - \frac{8\lambda - 4}{\lambda + 1} + 1 = 0$$

Množimo z $(\lambda+1)^2$ in dobimo enačbo

$$2\lambda^2 + 4\lambda - 7 = 0,$$

ki ima dve rešitvi $\lambda_{1,2} = -1 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
Od tod sledita dve stacionarni točki $T_1(1-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$ in $T_2(1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$. Trivialno sledi, da je vrednost funkcije f v prvi točki manjša kot v drugi točki, zato je točka T_1 tista, ki je na krivulji najbližje dani točki T, točka T_2 pa tista, ki je najdlje. Krivulja je krožnica s središčem v točki $(1, 2)$ in radijem 2.

4. Razvij funkcijo



v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rešitev:
Dana funkcija je soda, zato so koeficienti $b_n = 0$. Funkcijski predpis za interval $[0, \pi]$ se glasi:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

Koeficient a_0 izračunamo kar s ploščino:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot S = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{3\pi}{8}$$

Koeficiente a_n izračunamo po formuli (per partes: $u = x$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$,

$\mathrm{d}v = \cos(nx)\mathrm{d}x$, $v = \frac{1}{n}\sin(nx)$):

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(nx)\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos(nx)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(nx)\mathrm{d}x + \frac{\pi}{2n}\sin(nx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2n}\sin(\frac{n\pi}{2}) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2n}\sin(\frac{n\pi}{2})\right) \\
&= \frac{2}{n^2\pi}\left(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1\right)
\end{aligned}$$

Fourierova vrsta:

$$f(x) = \frac{3\pi}{8} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left(\cos(\frac{n\pi}{2}) - 1\right)\cos(nx)$$

5. Reši diferencialno enačbo

$$y' + \frac{1}{\cos^2 x}y = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Poišči tisto rešitev, ki zadošča pogoju $y(0) = 5$.

Rešitev:

To je linearna diferencialna enačba. Najprej rešimo homogeni del z ločitvijo spremenljivk:

$$\begin{aligned}
y' + \frac{1}{\cos^2 x}y &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{y}{\cos^2 x} \\
\int\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} \\
\ln y &= -\mathrm{tg}x + \ln C \\
y_H &= C\mathrm{e}^{-\mathrm{tg}x}
\end{aligned}$$

Partikularno rešitev izračunamo z variacijo konstante:

$$\begin{aligned}
y &= C(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{tg}x} \\
y' &= C'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{tg}x} - C(x)\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{e}^{-\mathrm{tg}x}
\end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo:

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{tg}x} - C(x)\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{e}^{-\mathrm{tg}x} + \frac{1}{\cos^2 x}C(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{tg}x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Dobimo ($t = \mathrm{tg}x$, $\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 x \mathrm{d}x}$):

$$C(x) = \int \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t \mathrm{d}t = \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^{\mathrm{tg}x} + D$$

Torej je splošna rešitev:

$$y(x) = 1 + D\mathrm{e}^{-\mathrm{tg}x}$$

Sedaj vstavimo še začetni pogoj: $y(0) = 1 + D = 5$, od koder sledi $D = 4$.
Iskana rešitev je torej:

$$y(x) = 1 + 4\mathrm{e}^{-\mathrm{tg}x}$$