

IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

14. september 2006

1. [20T] Izračunaj lastne vrednosti in lastni vektor, ki pripada po absolutni vrednosti največji lastni vrednosti, za matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:

Lastne vrednosti dobimo kot rešitve enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2 - \lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(2 - \lambda)(-1 - \lambda) + 2 + 12 - 8(2 - \lambda) \\ &\quad + (1 - \lambda) + 3(-1 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)(2 - \lambda)(-1 - \lambda) - 4(1 - \lambda) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

Lastne vrednosti so: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ in $\lambda_3 = 3$.

Po absolutni vrednosti največja lastna vrednost je 3. Izračunajmo še pripadajoči lastni vektor:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 3 je torej $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. [20T] Funkcijo

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

razvij v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rešitev:

Za razvoj funkcije v Fourierovo vrsto, je potrebno izračunati koeficiente a_0 , a_n in b_n .

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 -x dx = -\frac{1}{2\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^0 = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x \cos(nx) dx \quad (*) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\underbrace{\frac{x}{n} \sin(nx)}_0 \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx \right) \\ &= -\frac{1}{\pi n^2} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^0 \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \end{aligned}$$

Na mestu označenem z (*) smo integrirali per partes:

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \cos(nx) dx \\ du &= dx & v &= \frac{1}{n} \sin(nx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -x \sin(nx) dx \quad (**) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos(nx) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} (-1)^n + \underbrace{\frac{1}{n^2} \sin(nx)}_0 \Big|_{-\pi}^0 \right) \\ &= \frac{1}{n} (-1)^n \end{aligned}$$

Na mestu označenem z (**) smo integrirali per partes:

$$\begin{aligned}u &= x & dv &= \sin(nx)dx \\ du &= dx & v &= -\frac{1}{n} \cos(nx)\end{aligned}$$

Razvoj funkcije $f(x)$ v Fourierovo vrsto se tedaj glasi:

$$\begin{aligned}f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos(nx) + \frac{1}{n} (-1)^n \sin(nx) \right).\end{aligned}$$

3. [20T] Izračunaj totalni diferencial funkcije

$$f(x, y, z) = \ln \frac{xy}{z} + \arctan \frac{1}{z} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Rešitev:

Za izračun totalnega diferenciala potrebujemo vse tri prve parcialne odvode funkcije $f(x, y, z)$:

$$\begin{aligned}f_x &= \frac{z}{xy} \cdot \frac{y}{z} + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ f_y &= \frac{z}{xy} \cdot \frac{x}{z} + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2y = \frac{1}{y} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ f_z &= \frac{z}{xy} \cdot \frac{-xy}{z^2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{z^2}} \cdot \frac{-1}{z^2} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1 + z^2}\end{aligned}$$

Totalni diferencial je:

$$\begin{aligned}df &= f_x dx + f_y dy + f_z dz \\ &= \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dx + \left(\frac{1}{y} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy + \left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{1 + z^2} \right) dz\end{aligned}$$

4. [20T] Reši diferencialno enačbo

$$xy'(x) + 2y(x) = 4x^2,$$

skupaj z začetnim pogojem $y(1) = 3$.

Rešitev:

Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

- Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned} xy' &= -2y \\ \int \frac{dy}{y} &= -2 \int \frac{dx}{x} \\ \ln y &= -2 \ln x + \ln C \\ y &= Cx^{-2} \end{aligned}$$

- Nehomogeni del rešimo s pomočjo variacije konstante.

$$\begin{aligned} y(x) &= C(x)x^{-2} \\ y'(x) &= C'(x)x^{-2} - 2C(x)x^{-3} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$C'(x)x^{-1} - 2C(x)x^{-2} + 2C(x)x^{-2} = 4x^2.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int 4x^3 dx = x^4 + D \\ \Rightarrow y(x) &= (x^4 + D)x^{-2} = x^2 + Dx^{-2}. \end{aligned}$$

Upoštevajmo sedaj še začetni pogoj.

$$3 = y(1) = 1 + D \Rightarrow D = 2.$$

Rešitev začetnega problema se torej glasi:

$$y(x) = x^2 + 2x^{-2}.$$

5. [20T] Poišči rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} y''(x) + 4y'(x) + 3y(x) &= 4e^{-x}, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 4. \end{aligned}$$

Rešitev:

Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

- Rešimo najprej homogeni del:

$$y'' + 4y' + 3y = 0.$$

Uporabimo nastavek $y = e^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$. Ta polinom razstavimo in dobimo $(\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0$, kar nam da dve rešitvi, in sicer $\lambda_1 = -1$ in $\lambda_2 = -3$.

Homogeni del rešitve se tako glasi:

$$y_H = Ae^{-x} + Be^{-3x}$$

- Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka, ki se glasi $y_p = Cxe^{-x}$, ker je -1 ničla karakterističnega polinoma. Odvajamo in dobimo $y_p' = Ce^{-x} - Cxe^{-x}$ in $y_p'' = -2Ce^{-x} + Cxe^{-x}$. To vstavimo v enačbo:

$$\begin{aligned} -2Ce^{-x} + Cxe^{-x} + 4Ce^{-x} - 4Cxe^{-x} + 3Cxe^{-x} &= 4e^{-x} \\ \Rightarrow C &= 2 \end{aligned}$$

Dobimo partikularno rešitev:

$$y_p = 2xe^{-x}.$$

Splošna rešitev se glasi:

$$y(x) = y_H + y_p = Ae^{-x} + Be^{-3x} + 2xe^{-x}.$$

Za začetne pogoje potrebujemo še odvod splošne rešitve:

$$y'(x) = -Ae^{-x} - 3Be^{-3x} + 2e^{-x} - 2xe^{-x}.$$

Vstavimo začetna pogoja in dobimo:

$$\begin{aligned} 0 = y(0) &= A + B \\ 4 = y'(0) &= -A - 3B + 2 \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema enačb je: $A = 1$ in $B = -1$. Torej je rešitev začetnega problema:

$$y(x) = e^{-x} - e^{-3x} + 2xe^{-x}.$$