

## IZPIT IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

17. september 2007

1. Določi parameter  $a$  tako, da bo premica

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{a}$$

vzporedna ravnini, ki vsebuje premico

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$$

in točko  $T(4, -2, -1)$ .

**Rešitev:** Naj ravnina  $\Pi$  vsebuje dano premico in dano točko, ki ne leži na premici. Začetna točka premice je  $T_0(0, 0, 0)$ , smerni vektor pa  $\vec{e} = (2, 1, 1)$ . Torej imamo dva nevzporedna vektorja v ravnini  $\Pi$ :  $\vec{e}$  in  $\vec{r} = \vec{T_0T} = (4, -2, -1)$ . Izračunamo normalo ravnine:

$$\vec{n} = \vec{r} \times \vec{e} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 6, 8).$$

Da bo premica vzporedna z ravnino, mora biti smerni vektor  $\vec{f} = (2, -1, a)$  premice pravokoten na normalo  $\vec{n}$  ravnine, torej mora biti skalarni produkt  $\vec{f} \cdot \vec{n} = 0$ . Sledi:

$$-8 + 8a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1.$$

2. Določi parametra  $a$  in  $b$  tako, da imajo ravnine, podane z enačbami

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y - 3z &= 2 \\ 3x + y + bz &= a \end{aligned}$$

skupno premico.

**Rešitev:** Tri ravnine se bodo sekale v skupni premici, ko bo imel dan sistem enačb 1-parametrično družino rešitev, to je, ko bosta ranga matrike koeficientov in razširjene matrike enaka 2.

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & b & a \end{array} \right] &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & b-3 & a-3 \end{array} \right] \\ &\sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & b+1 & a-4 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Ranga sta enaka 2, ko je  $a = 4$  in  $b = -1$ .

3. Izračunaj ekstremske funkcije

$$f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

**Rešitev:** Najprej izračunamo prva parcialna odvoda:

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 6y, \\ f_y &= 24y^2 - 6x. \end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba odvoda enaka 0. Rešiti je potrebno sistem enačb  $3x^2 - 6y = 0$  in  $24y^2 - 6x = 0$ . Iz druge enačbe dobimo  $x = 4y^2$  in to vstavimo v prvo enačbo. Sledi:  $48y^4 - 6y = 0$ . Razstavimo in dobimo:  $6y(2y - 1)(4y^2 + 2y + 1) = 0$ . Torej:  $y_1 = 0$  in  $y_2 = \frac{1}{2}$ , zato  $x_1 = 0$  in  $x_2 = 1$ . Imamo dve stacionarni točki:  $T_1(0, 0)$  in  $T_2(1, \frac{1}{2})$ .

Sedaj izračunamo druge parcialne odvode:  $f_{xx} = 6x$ ,  $f_{yy} = 48y$  in  $f_{xy} = -6$ . Hessejeva matrika funkcije  $f$  je

$$H_f = \begin{bmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 48y \end{bmatrix}.$$

Nato za vsako stacionarno točko izračunamo vrednost determinante Hessejeve matrike v tej točki.

$$\det H_f(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$$

V točki  $T_1(0, 0)$  imamo sedlo.

$$\det H_f\left(1, \frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{vmatrix} = 108 > 0$$

Ker je poleg tega tudi  $f_{xx}(1, \frac{1}{2}) = 6 > 0$ , imamo v točki  $T_2(1, \frac{1}{2})$  lokalni minimum.

4. Določi ortogonalne trajektorije k družini krivulj

$$e^x \sin y = C.$$

**Rešitev:** Najprej z odvajanjem poiščemo diferencialno enačbo, katere rešitev je ta družina.

$$\begin{aligned} e^x \sin y + e^x \cos y y' &= 0 \\ y' &= -\frac{\sin y}{\cos y} \end{aligned}$$

Nato zgeneriramo novo diferencialno enačbo:

$$y' = \frac{\cos y}{\sin y}.$$

Rešitve te diferencialne enačbe so ortogonalne trajektorije. S pomočjo ločitve spremenljivk izračunamo:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos y}{\sin y} \\ \int \frac{\sin y dy}{\cos y} &= \int dx \\ -\ln(\cos y) &= x - \ln D \\ \cos y &= De^{-x} \end{aligned}$$

Pri tem smo integral

$$\int \frac{\sin y dy}{\cos y} = -\int \frac{dt}{t} = -\ln t = -\ln(\cos y)$$

izračunali s pomočjo uvedbe nove spremenljivke  $t = \cos y$  in  $dt = -\sin y dy$ .

Ortogonalne trajektorije so:

$$e^x \cos y = D.$$

5. Reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= y, & x(0) &= 3, & y(0) &= 0, \\ \ddot{y} &= y, & \dot{x}(0) &= -1, & \dot{y}(0) &= 1. \end{aligned}$$

**Rešitev:** Najprej rešimo diferencialno enačbo  $\ddot{y} - y = 0$ , ki je homogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

Karakteristični polinom je  $\lambda^2 - 1 = 0$ , ki ima ničle  $\lambda_{1,2} = \pm 1$ , zato je rešitev enačbe:

$$y = Ae^t + Be^{-t}.$$

Odvajamo:

$$\dot{y} = Ae^t - Be^{-t}.$$

Vstavimo začetne pogoje in dobimo sistem enačb

$$y(0) = A + B = 0,$$

$$\dot{y}(0) = A - B = 1,$$

ki ima rešitev  $A = \frac{1}{2}$  in  $B = -\frac{1}{2}$ . Torej:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Sedaj pa rešimo še diferencialno enačbo  $\ddot{x} = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}$  tako, da dvakrat integriramo.

$$\dot{x} = \int \left( \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} \right) dt = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + C$$

$$x = \int \left( \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} + C \right) dt = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} + Ct + D$$

Vstavimo začetne pogoje in dobimo sistem enačb

$$x(0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + D = 3,$$

$$\dot{x}(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C = -1,$$

ki ima rešitev  $C = -2$  in  $D = 3$ . Torej:

$$x(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} - 2t + 3.$$