REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Pokažite, da se premici $\vec{r_1} = (1, 2, -1) + t(2, 2, 1)$ in $\vec{r_2} = (-1, -2, 3) + s(4, 6, -3)$ sekata, in poiščite koordinate presečišča. Zapišite enačbo ravnine, ki jo dani premici določata.

Zapišimo enačbi obeh premic v parametrični obliki:

$$\begin{aligned} \textit{prva premica}: \quad x &= 1 + 2t \\ y &= 2 + 2t \\ z &= -1 + t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{druga premica}: \quad x &= -1 + 4s \\ y &= -2 + 6s \\ z &= 3 - 3s \end{aligned}$$

Presečišče obeh premic je točka, katere koordinate zadoščajo obema enačbama. To je:

$$\begin{aligned} x: &\quad 1 + 2t = -1 + 4s \\ y: &\quad 2 + 2t = -2 + 6s \\ z: &\quad -1 + t = 3 - 3s \end{aligned}$$

Dobimo nehomogeni sistem treh linearnih enačb za dve neznanki, ki ga preoblikujemo do zgornjetrikotne oblike:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} \textit{2. vr.} - \textit{1. vr.} \\ \textit{3. vr.} - \textit{1. vr.} \\ \hline \textit{3. vr.} + 5 \times \textit{2. vr.} \end{array}$$

Premici se sekata natanko tedaj, ko ima zgornji sistem eno samo rešitev. To je res, zato ker je rang matrike (2) enak številu neznank sistema (s, t). Torej, premici se sekata. Koordinate presečišča določa zgornja razširjena matrika:

$$\begin{aligned} t - 2s &= -1 \\ -s &= -1 \end{aligned}$$

Torej $s = 1$ in $t = 1$. Točka, v kateri se premici sekata, je zato $P(3, 4, 0)$.

Ravnina, ki jo sekajoči se premici določata, je določena s presečiščem premic in normalo, ki je vektorski produkt smernih vektorjev premic. Torej

$$\vec{n} = \vec{s_1} \times \vec{s_2} = (2, 2, 1) \times (4, 6, -3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & -3 \end{vmatrix} = (-12, 10, 4) = 2(-6, 5, 2).$$

Za normalo lahko vzamemo vektor $\vec{n'} = (-6, 5, 2)$ *in dobimo enačbo ravnine:*

$$-6x + 5y + 2z = d, \;\; d = \vec{n'} \cdot \vec{r_P} = (-6, 5, 2) \cdot (3, 4, 0) = -18 + 20 = 2.$$

Enačba ravnine se torej glasi

$$-6x + 5y + 2z = 2.$$

Naloga 2 (20 točk)

Poiščite lastne vrednosti in lastni vektor, ki pripada najmanjši lastni vrednosti matrike

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti matrike so rešitve enačbe $\det(M - \lambda I) = 0$. *Računajmo torej determinanto:*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

$$= (2-\lambda)((1-\lambda)^2(2-\lambda) - 4(2-\lambda)) = (2-\lambda)^2((1-\lambda)^2 - 4) = (2-\lambda)^2(\lambda^2 - 2\lambda - 3)$$

$$= (2-\lambda)^2(\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

Sledi, najmanjša lastna vrednost matrike M *je* -1. *Sicer imamo še lastni vrednosti* 2 *(dvakrat) in* 3.

Izračunajmo še lastni vektor za lastno vrednost -1. *Rešiti moramo homogeni sistem linearnih enačb* $(M - \lambda I)\vec{x} = 0$, *torej sistem* $(M + I)\vec{x} = 0$. *Sistem najprej poenostavimo:*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Sledi:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= 0, \\ x_2 &= 0, \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti -1, *sedaj dobimo, tako da v rešitev* $(x_1, 0, 0, -x_1)$ *za prosti parameter* x_1 *vstavimo poljubno neničelno realno vrednost, na primer* $x_1 = 1$. *Dobimo lastni vektor* $\vec{v} = (1, 0, 0, -1)$.

Naloga 3 (20 točk)

Dana je periodična funkcija

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \pi \end{cases}$$

s periodo 2π. Določite koeficiente a_0, a_1, b_1, a_2 in b_2 funkcije

$$g(t) = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t,$$

ki je delna vsota Fourierove vrste funkcije $f(t)$.

Funkcija $f(t)$ je liha, zato velja: $a_0 = 0$ in $a_1 = 0$. Izračunati moramo le preostala koeficienta b_1 in b_2. To lahko naredimo, tako da izračunamo kar splošni koeficient:

$$\begin{aligned} b_n &= \tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \tfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nt\,dt = \tfrac{2}{\pi}\left[-\tfrac{1}{n}\cos nt\right]_0^{\pi} \\ &= -\tfrac{2}{n\pi}(\cos n\pi - 1) = -\tfrac{2}{n\pi}((-1)^n - 1) = \tfrac{2}{n\pi}(1-(-1)^n). \end{aligned}$$

Sledi $b_1 = \frac{4}{\pi}$ in $b_2 = 0$. Funkcija $g(t)$ je zato enaka

$$g(t) = \frac{4}{\pi}\sin t.$$

Naloga 4 (20 točk)

Poiščite točke, v katerih funkcija

$$f(x, y, z) = xyz$$

doseže najmanjšo in največjo vrednost pri pogoju

$$x + y + z = 12.$$

Kandidati za najmanjšo in največjo vrednost (vezani ekstremi) so stacionarne točke Lagrangeove funkcije

$$F(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y) = xyz + \lambda(x + y + z - 12).$$

Poiščimo torej stacionarne točke Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned} F'_x &= yz + \lambda = 0, \\ F'_y &= xz + \lambda = 0, \\ F'_z &= xy + \lambda = 0, \\ F'_\lambda &= x + y + z - 12 = 0. \end{aligned}$$

Rešitev sistema so tri točke: $T_1(12, 0, 0)$, $T_2(0, 12, 0)$, $T_3(0, 0, 12)$ in $T_4(4, 4, 4)$. V točkah T_1, T_2 in T_3 funkcija $f(x, y, z)$ doseže vrednost 0, v točki T_4 pa vrednost $4^3 = 64$.

Sledi, najmanjšo vrednost na danem območju funkcija doseže v točkah T_1, T_2 in T_3. Največjo vrednost doseže v točki T_4.

Naloga 5 (20 točk)

Rešite začetni problem:

$$y' + 5y - x = e^{-2x},$$
$$y(-1) = 0.$$

Dana diferencialna enačba

$$y' + 5y = x + e^{-2x}$$

ima konstantne koeficiente. Splošna rešitev je vsota rešitve homogenega dela y_h in partikularne rešitve y_p.

A.) Homogeni del:

Karakteristična enačba homogenega dela se glasi

$$\lambda + 5 = 0,$$

torej $\lambda = -5$ in rešitev homogenega dela je enaka

$$y_h = Ce^{-5x}.$$

B.) Nehomogeni del:

Partikularno rešitev dobimo z nastavkom

$$y_p = Ax + B + De^{-2x}.$$

Nastavek odvajamo $y' = A - 2De^{-2x}$ in vstavimo v diferencialno enačbo:

$$A - 2De^{-2x} + 5(Ax + B + De^{-2x}) = x + e^{-2x},$$
$$5Ax + A + 5B + 3De^{-2x} = x + e^{-2x}.$$

Sledi sistem:

$$5A = 1,$$
$$A + 5B = 0,$$
$$3D = 1.$$

Rešitev sistema so koeficienti $A = \frac{1}{5}$, $B = -\frac{1}{25}$ in $D = \frac{1}{3}$. Partikularna rešitev diferencialne enačbe je zato enaka

$$y_p = \frac{1}{5}x - \frac{1}{25} + \frac{1}{3}e^{-2x}.$$

Splošna rešitev diferencialne enačbe je enaka

$$y = y_h + y_p = Ce^{-5x} + \frac{1}{5}x - \frac{1}{25} + \frac{1}{3}e^{-2x}.$$

Rešimo še začetni problem:

$$y(-1) = 0: \quad 0 = Ce^{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{3}e^{2},$$

$$C = \left(\frac{6}{25} - \frac{1}{3}e^{2}\right) e^{-5},$$

$$y = \left(\frac{6}{25} - \frac{1}{3}e^{2}\right) e^{-5(x+1)} + \frac{1}{5}x - \frac{1}{25} + \frac{1}{3}e^{-2x}.$$