REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Podana so oglišča tristrane piramide:

$$A(1,2,3),\ B(-1,0,-1),\ C(5,4,3),\ D(1,0,-2).$$

Določite:

a.) enačbo ravnine π, ki vsebuje točke A, B in C,

b.) premico, ki je pravokotna na ravnino π in gre skozi točko D,

c.) višino piramide skozi oglišče D.

a.) *Da bi zapisali enačbo ravnine, rabimo vektor, ki je pravokoten na ravnino. Dobimo ga, tako da vektorsko pomnožimo dva vektorja, ki ležita na ravnini. Na primer:*

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{AB} = (-1,0,-1)-(1,2,3) = (-2,-2,-4) = -2(1,1,2),\\ \vec{b} &= \vec{AC} = (5,4,3)-(1,2,3) = (4,2,0) = 2(2,1,0).\end{aligned}$$

Torej:

$$\vec{n} = (1,1,2)\times(2,1,0) = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix} = (-2,4,-1).$$

Enačba ravnine π se sedaj glasi

$$-2x+4y-z=d,$$

kjer je

$$d = \vec{n}\cdot\vec{r_A} = (-2,4,-1)\cdot(1,2,3) = -2+8-3 = 3.$$

b.) *Za smerni vektor premice p, ki je pravokotna na ravnino π in gre skozi točko $D(1,0,-2)$, lahko vzamemo normalo $\vec{n}=(-2,4,-1)$. Dobimo kanonično obliko enačbe premice:*

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y}{4} = \frac{z+2}{-1}.$$

c.) *Izračunajmo presečišče premice p in ravnine π, katere enačba v parametrični obliki se glasi takole:*

$$\begin{aligned}x &= 1-2t,\\ y &= 4t,\\ z &= -2-t.\end{aligned}$$

Presečišče P dobimo, če zgornje zveze vstavimo v enačbo ravnine:

$$\begin{aligned} -2x+4y-z &= 3, \\ -2(1-2t)+4\cdot 4t-(-2-t) &= 3, \\ 21t &= 3, \\ t &= \frac{1}{7}, \\ & P(\frac{5}{7},\frac{4}{7},-\frac{15}{7}). \end{aligned}$$

Višina piramide skozi oglišče D je enaka dolžini vektorja

$$\vec{PD}=(1,0,-2)-(\frac{5}{7},\frac{4}{7},-\frac{15}{7})=(\frac{2}{7},-\frac{4}{7},\frac{1}{7}).$$

Torej

$$v_D=|\vec{PD}|=|(\frac{2}{7},-\frac{4}{7},\frac{1}{7})|=\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(-\frac{4}{7}\right)^2+\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Naloga 2 (20 točk)

Naj bo A matrika, katere lastni vrednosti sta $\lambda_1=2$ in $\lambda_2=3$, pripadajoča lastna vektorja pa $\vec{v_1}=(1,3)^T$ in $\vec{v_2}=(6,-1)^T$. Določite vse elemente matrike A.

Vemo naslednje:

$$\begin{aligned} A\cdot\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} &= 2\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}, \\ A\cdot\begin{bmatrix}6\\-1\end{bmatrix} &= 3\begin{bmatrix}6\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18\\-3\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Obe zgornji enačbi lahko združimo v eno matrično enačbo

$$A\cdot\begin{bmatrix}1&6\\3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&18\\6&-3\end{bmatrix}.$$

Rešitev je matrika

$$A=\begin{bmatrix}2&18\\6&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&6\\3&-1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2&18\\6&-3\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{-19}\begin{bmatrix}-1&-6\\-3&1\end{bmatrix}=-\frac{1}{19}\begin{bmatrix}-56&6\\3&-39\end{bmatrix}.$$

Naloga 3 (20 točk)

Funkcijo

$$f(x)=x(4-x)^{\frac{1}{2}}$$

razvijte v Taylorjevo vrsto okrog točke 0 in določite območje konvergence vrste.

Pri razvoju funkcije $f(x)$ v Taylorjevo vrsto si bomo pomagali z Binomsko vrsto

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

ki konvergira za $|x| < 1$. To je:

$$\begin{aligned} f(x) &= x(4-x)^{\frac{1}{2}} \\ &= x \cdot 4^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + \frac{-x}{4})^{\frac{1}{2}} \\ &= 2x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \left(\frac{-x}{4}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{4}\right)^k \binom{\frac{1}{2}}{k} x^{k+1}. \end{aligned}$$

Dobljena Taylorjeva vrsta konvergira, ko velja

$$\left|\frac{-x}{4}\right| < 1 \implies |x| < 4.$$

Naloga 4 (20 točk)

Založnik ocenjuje, da mu prodaja knjige prinese zaslužek

$$f(x,y) = xy\sqrt{y},$$

kjer je x znesek, vložen v oblikovanje knjige, y pa znesek, vložen v reklamo. Kako naj založnik razporedi sredstva v višini 20 000 EUR, da bo zaslužek največji?

Sredstva v višini 20 000 EUR založnik nameni oblikovanju knjige in reklami, kar lahko zapišemo z naslednjim pogojem:

$$x + y = 20\,000.$$

Največji zaslužek dobimo kot maksimum funkcije $f(x,y)$ pri zgornjem pogoju, torej kot vezan ekstrem. Zapišimo Lagrangeovo funkcijo:

$$F(x,y;\lambda) = xy\sqrt{y} + \lambda(x + y - 20\,000).$$

Kandidati za vezane ekstreme so stacionarne točke Lagrangeove funkcije, to je rešitve naslednjega sistema enačb:

$$\begin{aligned} F'_x &= y\sqrt{y} + \lambda = 0, \\ F'_y &= x \cdot \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} + \lambda = 0, \\ F'_\lambda &= x + y - 20\,000 = 0. \end{aligned}$$

Če prvi dve enačbi odštejemo, dobimo

$$\begin{aligned} y\sqrt{y} - x \cdot \frac{3}{2} y^{\frac{1}{2}} &= 0, \\ y^{\frac{1}{2}}(y - \frac{3}{2}x) &= 0, \end{aligned}$$
$$y = 0 \quad ali \quad y = \frac{3}{2}x.$$

Ločimo torej dve možnosti:

- $y = 0 \implies x = 20\,000$,

- $y = \frac{3}{2}x \implies x + \frac{3}{2}x = 20\,000 \implies x = 8\,000$ *in* $y = 12\,000$.

Ker je

$$\begin{aligned} f(20\,000, 0) &= 0, \\ f(8\,000, 12\,000) &= 8\,000 \cdot 12\,000 \cdot \sqrt{12\,000} > 0, \end{aligned}$$

vidimo, da je v prvi točki vezan minimum, v drugi pa vezan maksimum. Torej, založnik bo dosegel največji zaslužek, če bo 8 000 *EUR namenil za oblikovanje knjige,* 12 000 *EUR pa za reklamo.*

Naloga 5 (20 točk)

Določite parameter a tako, da bo diferencialna enačba

$$2xy\,dx + (x^a - y^2)\,dy = 0$$

eksaktna. Dobljeno eksaktno diferencialno enačbo rešite.

Dana diferencialna enačba bo eksaktna, če bo veljalo

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y),$$

kjer sta

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 2xy \implies P'_y(x,y) = 2x, \\ Q(x,y) &= x^a - y^2 \implies Q'_x(x,y) = ax^{a-1}. \end{aligned}$$

Sledi: $a = 2$. *Dana diferencialna enačba se torej v eksaktni obliki glasi takole:*

$$dz(x,y) = 2xy\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0.$$

Do rešitve $z(x,y) = C$ *pridemo, tako da rešimo naslednji sistem enačb:*

$$\begin{aligned} z'_x &= P(x,y) = 2xy, \\ z'_y &= Q(x,y) = x^2 - y^2. \end{aligned}$$

Iz prve enačbe sledi

$$z(x,y) = \int z'_x\,dx = \int 2xy\,dx = 2y\frac{x^2}{2} + D(y) = yx^2 + D(y).$$

Dobljeno funkcijo $z(x,y)$ sedaj parcialno odvajamo po y:

$$z'_y = x^2 + D'_y.$$

Iz druge enačbe zgornjega sistema sledi:

$$x^2 - y^2 = x^2 + D'_y,$$

kar pomeni, da je $D(y)$, ki je le funkcija y, enaka:

$$D'_y = -y^2 \implies D(y) = \int D'_y\,dy = -\int y^2\,dy = -\frac{y^3}{3} \quad \text{(konstante ne pišemo).}$$

Sledi

$$z(x,y) = yx^2 + D(y) = yx^2 - \frac{y^3}{3}$$

in rešitev eksaktne dif. enačbe je

$$yx^2 - \frac{y^3}{3} = C.$$