IZPIT IZ MATEMATIKE II

Univerzitetni študij

12. september 2011

1. Dane so točke $A(-1,2,3)$, $B(1,-1,-2)$ in $C(3,-2,2)$.

   a) Določite enačbo ravnine skozi dane točke.

   b) Izračunajte ploščino trikotnika ABC.

   c) Izračunajte razdaljo točke C do premice skozi točki A in B.

   Rešitev:

   a) Označimo vektorja $\vec{a} = \vec{AB} = (2,-3,-5)$ in $\vec{b} = \vec{AC} = (4,-4,-1)$. Izračunamo normalo ravnine:

   $$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -5 \\ 4 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (-17,-18,4).$$

   Ker je $d = (-17,-18,4) \cdot (-1,2,3) = -7$, se enačba ravnine glasi

   $$-17x - 18y + 4z = -7.$$

   b) Ploščina trikotnika:

   $$p = \tfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \tfrac{\sqrt{629}}{2}.$$

   c) Razdaljo med točko in premico, dobimo iz enačbe za ploščino trikotnika $p = \frac{a \cdot v_a}{2}$, kjer je iskana količina $d = v_a$:

   $$d = \tfrac{2p}{|\vec{a}|} = \sqrt{\tfrac{629}{38}}.$$

2. Določite parametra a in b v matriki

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 3 \\ b & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   tako, da bosta -2 in 2 lastni vrednosti. Določite še tretjo lastno vrednost ter lastni vektor, ki ji pripada.

   Rešitev:

   Iz pogojev, da morata biti -2 in 2 lastni vrednosti, dobimo sistem enačb

   $$\begin{aligned} \det(A-2I) &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & a \\ 0 & -3 & 3 \\ b & 2 & -1 \end{vmatrix} = 6b + 3ab + 3 = 0, \\ \det(A+2I) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & a \\ 0 & 1 & 3 \\ b & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6b - ab - 9 = 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $a = -3$ in $b = 1$.

Izračunajmo še tretjo lastno vrednost:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 2)(1 - \lambda).$$

Sledi: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ in $\lambda_3 = 1$. Da določimo lastni vektor, ki pripada zadnji lastni vrednosti, reduciramo matriko

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Od tod sledi, da je lastni vektor

$$x_3 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Določite in klasificirajte lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

Rešitev:

Najprej izračunamo oba prva parcialna odvoda:

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 6y, \\ f_y &= 24y^2 - 6x. \end{aligned}$$

Kritične točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Dobimo sistem enačb $x^2 - 2y = 0$ in $4y^2 - x = 0$, ki ima dve realni rešitvi: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ ter $x_2 = 1$, $y_2 = \frac{1}{2}$. Dobimo dve kritični točki: $T_1(0, 0)$ in $T_2(1, \frac{1}{2})$.

Nato izračunamo vse druge parcialne odvode:

$$f_{xx} = 6x, \qquad f_{xy} = -6, \qquad f_{yy} = 48y.$$

i) $T_1(0, 0)$: Ker je $A = f_{xx}(0, 0) = 0$, $B = f_{xy}(0, 0) = -6$, $C = f_{yy}(0, 0) = 0$ in $\Delta = AC - B^2 = -36 < 0$, imamo v tej kritični točki sedlo.

ii) $T_2(1, \frac{1}{2})$: Ker je $A = f_{xx}(1, \frac{1}{2}) = 6 > 0$, $B = f_{xy}(1, \frac{1}{2}) = -6$, $C = f_{yy}(1, \frac{1}{2}) = 24$ in $\Delta = AC - B^2 = 108 > 0$, imamo v tej kritični točki lokalni minimum.

4. Rešite diferencialno enačbo

$$y^2 y' + x^2 y^3 = x^2$$

skupaj z začetnim pogojem $y(0) = 2$.

Rešitev:

To je Bernoullijeva diferencialna enačba. Uvedemo novo spremenljivko $u = y^3$ in $u' = 3y^2 y'$, da dobimo nehomogeno linearno diferencialno enačbo prvega reda

$$\tfrac{u'}{3} + x^2 u = x^2.$$

(i) Homogeni del.

$$\begin{aligned} u' + 3x^2 u &= 0 \\ \int \frac{du}{u} &= -\int 3x^2 dx \\ \ln u &= -x^3 + \ln C \\ u_H &= C\mathrm{e}^{-x^3} \end{aligned}$$

(ii) Nehomogeni del rešimo z variacijo konstante.

$$\begin{aligned} u &= C(x)\mathrm{e}^{-x^3} \\ u' &= C'(x)\mathrm{e}^{-x^3} - 3C(x)x^2\mathrm{e}^{-x^3} \end{aligned}$$

Vstavimo v enačbo in dobimo ($t = x^3$, $dt = 3x^2dx$):

$$\begin{aligned} C'(x) &= 3x^2\mathrm{e}^{x^3} \\ C(x) &= \int 3x^2\mathrm{e}^{x^3} dx = \int \mathrm{e}^t dt = \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^{x^3} \end{aligned}$$

Partikularna rešitev:

$$u_p = 1.$$

Splošna rešitev:

$$u(x) = u_p + u_H = 1 + C\mathrm{e}^{-x^3}.$$

Obratna substitucija, da dobimo rešitev za y:

$$y(x) = \sqrt[3]{1 + C\mathrm{e}^{-x^3}}.$$

Začetni pogoj:

$$y(0) = \sqrt[3]{1 + C} = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 7.$$

Rešitev začetnega problema:

$$y(x) = \sqrt[3]{1 + 7\mathrm{e}^{-x^3}}.$$

5. Rešite diferencialno enačbo

$$y'' + y' - 1 = -2x^2 + 2y.$$

Rešitev:
To je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

(i) Homogeni del:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Uporabimo nastavek $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0$, kar nam da dve rešitvi, in sicer $\lambda_1 = -2$ in $\lambda_2 = 1$:

$$y_H = A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{x}.$$

(ii) Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka $y_p = Cx^2 + Dx + E$. Odvajamo in dobimo $y_p' = 2Cx + D$ in $y_p'' = 2C$. Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$2C + 2Cx + D - 1 = -2x^2 + 2Cx^2 + 2Dx + 2E$$

Primerjava koeficientov nam da $C = 1$, $D = 1$ in $E = 1$:

$$y_p = x^2 + x + 1.$$

Splošna rešitev:

$$y(x) = y_p + y_H = x^2 + x + 1 + A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{x}.$$