IZPIT IZ MATEMATIKE II

Univerzitetni študij

13. september 2013

1. Ali se premici
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = 1 - z \quad \text{in} \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{-1}$$
sekata? Odgovor utemeljite! Določite enačbo ravnine, v kateri ležita ti dve premici.

   Rešitev:

   Ker sta smerna vektorja $\vec{e}_1 = \vec{e}_2 = (3, 2, -1)$ enaka, sta premici vzporedni in se ne sekata. Vektor med začetnima točkama $T_1(1, -2, 1)$ in $T_2(-2, 3, -1)$ je $\vec{r} = \vec{T_1T_2} = (-3, 5, -2)$. Normala ravnine je $\vec{n} = \vec{r} \times \vec{e}_1 = (-1, -9, -21)$, enačba ravnine pa $x + 9y + 21z = 4$.

2. Določite vrednost parametra a tako, da bo 1 lastna vrednost matrike
$$A = \begin{bmatrix} 3 & a & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$
Poiščite še ostale lastne vrednosti in lastni vektor, ki pripada 1.

   Rešitev:

   Iščemo rešitev enačbe
$$\det(A - I) = \begin{vmatrix} 3 & a & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2a - 8 = 0.$$
Kot rešitev dobimo $a = -4$. Lastne vrednosti dobimo kot rešitve enačbe
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0.$$
Dobimo $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_{2,3} = 3$. Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 1, je $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. Katera točka na krivulji $16x^2 + 9y^2 = 144$ je najbližja točki $T(0, -1)$. Ali obstaja točka, ki je najdlje od točke T? Če obstaja, jo zapišite.

   Rešitev:

   Krivulja je elipsa z glavnima polosema $a = 3$ in $b = 4$. Funkcija razdalje je $d(x, y) = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$. Sestavimo Lagrangeevo funkcijo
$$F(x, y, \lambda) = x^2 + (y+1)^2 + \lambda(16x^2 + 9y^2 - 144)$$
in jo odvajamo po vseh treh spremenljivkah
$$\begin{aligned} F_x &= 2x + 32\lambda x = 0, \\ F_y &= 2y + 2 + 18\lambda y = 0, \\ F_\lambda &= 16x^2 + 9y^2 - 144 = 0. \end{aligned}$$

Kandidate za vezane ekstreme dobimo tam, kjer so vsi odvodi enaki 0. Iz prve enačbe dobimo $x(1+16\lambda)=0$. Za $x=0$ dobimo iz tretje enačbe $y=\pm 4$, za $\lambda=-\frac{1}{16}$ pa iz druge enačbe $y=-\frac{16}{7}$ in iz tretje enačbe $x=\pm\frac{\sqrt{297}}{7}$. Torej dobimo dve (simetrični) točki, ki sta najbližji dani točki: $T_1(-\frac{\sqrt{297}}{7},-\frac{16}{7})$ in $T_2(\frac{\sqrt{297}}{7},-\frac{16}{7})$. Točka, ki je najdlje od dane točke pa je $T_3(0,4)$.

4. Razvijte funkcijo

$$f(x)=\begin{cases} -\pi, & -\pi < x \leq 0, \\ \pi, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi,\pi]$. Zapišite še vsaj eno funkcijo, definirano na intervalu $[-\pi,\pi]$, ki ima Fourierova koeficienta $a_7=1$ in $b_3=2$.

Rešitev:

Dana funkcija je liha, zato je $a_0=a_n=0$ in računamo le

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \pi\sin(nx)\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{n}\cos(nx)\Big|_0^\pi=\begin{cases} 0, & n=2k, \\ \frac{4}{n}, & n=2k-1. \end{cases}$$

Tedaj je

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{2k-1}\sin((2k-1)x).$$

Primer iskane funkcije z danima Fourierovima koeficientoma je npr.

$$f(x)=\cos 7x+2\sin 3x.$$

5. Rešite diferencialno enačbo

$$y'=\mathrm{e}^{-3x}+4y.$$

Katera rešitev ima lokalni maksimum v točki $x_0=0$?

Rešitev:

To je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

(i) Homogeni del.

$$\begin{aligned} y'-4y &= 0 \\ \int\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int 4\,\mathrm{d}x \\ \ln y &= 4x+\ln C \\ y_H &= C\mathrm{e}^{4x} \end{aligned}$$

(ii) Nehomogeni del rešimo z variacijo konstante, kjer $y=C(x)\mathrm{e}^{4x}$ in $y'=C'(x)\mathrm{e}^{4x}+4C(x)\mathrm{e}^{4x}$ vstavimo v enačbo in dobimo $C'(x)=\mathrm{e}^{-7x}$, od koder sledi $C(x)=-\frac{1}{7}\mathrm{e}^{-7x}$ in dalje $y_p=-\frac{1}{7}\mathrm{e}^{-3x}$.

Splošna rešitev linearne enačbe je $y(x)=C\mathrm{e}^{4x}-\dfrac{1}{7}\mathrm{e}^{-3x}$.

Iščemo tako rešitev, za katero bo $y'(0)=0$. Ker je $y'(x)=4C\mathrm{e}^{4x}+\frac{3}{7}\mathrm{e}^{-3x}$, sledi $y'(0)=4C+\frac{3}{7}=0$, od koder dobimo $C=-\frac{3}{28}$. Iskana rešitev je

$$y(x)=-\frac{3}{28}\mathrm{e}^{4x}-\frac{1}{7}\mathrm{e}^{-3x}.$$