REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Matriko oblike

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

kjer je $\varphi \in \mathbb{R}$, imenujemo rotacijska matrika. Če matriko $R(\varphi)$ pomnožimo z vektorjem $\vec{x} = [x\ y]^T$, se vektor $\vec{x}$ v realni ravnini zarotira za kot φ.

a.) V kateri smeri (glede na urin kazalec) se zarotira vektor, če je $\varphi > 0$?

b.) Pri katerih vrednostih φ ima matrika $R(\varphi)$ realne lastne vrednosti in kakšne?

Vse odgovore dobro utemeljite.

Rešitev:

a.) *Če matriko $R(\varphi)$ pomnožimo z vektorjem $\vec{i} = [1\ 0]^T$, dobimo*

$$R(\varphi) \cdot \vec{i} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Ko je npr. $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, je prva komponenta ($\cos\varphi$) preslikanega vektorja pozitivna, druga ($-\sin\varphi$) pa negativna, zato gre za rotacijo v smeri urinega kazalca.

b.) *Realni lastni vektorji matrike $R(\varphi)$ so tisti vektorji, ki jim matrika ohranja smer. Pri rotaciji pa se vektorjem smer ohrani le takrat, kadar jih zarotiramo za večkratnike kota 180°. Matrika $R(\varphi)$ ima zato realne lastne vrednosti le pri naslednjih vrednostih kota φ:*

$$0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \ldots$$

Torej $\varphi = k\pi$, kjer je $k \in \mathbb{Z}$. Pri lihih večkratnikih π dobimo eno samo realno lastno vrednost -1, pri sodih večkratnikih π pa eno samo realno lastno vrednost 1.

Do enakega zaključka bi lahko prišli tudi z reševanjem karakteristične enačbe. Enačba $1 - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2$ ima realne rešitve natanko tedaj, kadar velja $D = \cos^2\varphi - 1 \geq 0$ oziroma $\cos\varphi = \pm 1$.

Naloga 2 (20 točk)

Dan je sistem linearnih enačb:

$$\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & & & = & 1, \\ x & + & ay & + & z & = & a, \\ x & + & y & + & az & = & 1. \end{array}$$

a.) Poiščite vsaj eno vrednost parametra a, pri kateri bo imel sistem več kot eno rešitev.

b.) Določite parameter a tako, da bo imel sistem natanko eno rešitev. To rešitev tudi zapišite.

Rešitev:

a.) *Če je $a = 1$, sta druga in tretja enačba sistema enaki, zato ima sistem treh enačb s tremi neznankami več kot eno rešitev (linearno neodvisnih enačb je manj kot neznank). V tem primeru imamo neskončno mnogo rešitev sistema.*

b.) *Sistem linearnih enačb zapišimo v matrični obliki in uporabimo Gaussovo eliminacijo:*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & -a^2 & 1-a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 1-a-a^2 & 0 \end{array}\right].$$

Sistem ima natanko eno rešitev, kadar je rang matrike koeficientov sistema enak 3. To pa je res natanko tedaj, kadar je $a \neq 1$ in $1 - a - a^2 \neq 0$. Torej

$$a \notin \{1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\}.$$

V tem primeru je rešitev sistema enaka

$$x = 0,\ y = 1,\ z = 0.$$

Naloga 3 (20 točk)

Vzemimo hiperbolični trigonometrični funkciji $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ in $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a.) Z uporabo Taylorjeve vrste za e^x razvijte funkciji $\sinh x$ in $\cosh x$ v Taylorjevi vrsti okrog $x = 0$.

b.) Opišite razlike med Taylorjevima vrstama za $\sinh x$ in $\sin x$, razviti okrog $x = 0$, ter razlike med Taylorjevima vrstama za $\cosh x$ in $\cos x$, razviti okrog $x = 0$.

Rešitev:

a.) *Taylorjeva vrsta funkcije e^x, razvita okrog $x = 0$, je enaka*

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Sledi

$$\begin{aligned}
\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots) - (1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots)}{2} \\
&= \frac{2x + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + 2 \cdot \frac{x^5}{5!} + \cdots}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots
\end{aligned}$$

in podobno

$$\begin{aligned}
\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \frac{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots) + (1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots)}{2} \\
&= \frac{2 + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .
\end{aligned}$$

b.) *Primerjajmo Taylorjevi vrsti funkcij sinus in hiperbolični sinus:*

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots , \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots .
\end{aligned}$$

Obe vrsti se razlikujeta le v predznaku vsakega drugega člena: medtem ko je predznak sodih členov Taylorjeve vrste funkcije sinus negativen, je predznak sodih členov Taylorjeve vrste funkcije hiperbolični sinus pozitiven. Podobno velja za funkciji kosinus in hiperbolični kosinus.

Naloga 4 (20 točk)

Dana je funkcija $f(x, y) = xy + 14$.

a.) Poiščite najmanjšo in največjo vrednost funkcije f pri pogoju $x^2 + y^2 = 18$.

b.) Narišite nivojske krivulje $z = f(x, y)$ za vrednosti $z = 0$, $z = 7$ in $z = 14$.

Rešitev:

a.) *Zapišimo Lagrangeovo funkcijo vezanega ekstremalnega problema:*

$$F(x, y; \lambda) = xy + 14 + \lambda(x^2 + y^2 - 18).$$

Najmanjša in največja vrednost funkcije f lahko nastopita le v stacionarnih točkah Lagrangeove funkcije:

$$\begin{aligned} F'_x &= y + 2\lambda x = 0, \\ F'_y &= x + 2\lambda y = 0, \\ F'_\lambda &= x^2 + y^2 - 18 = 0. \end{aligned}$$

Rešitve zgornjega sistema enačb so naslednje stacionarne točke:

$$T_1(3,-3),\ T_2(-3,3),\ T_3(3,3),\ T_4(-3,-3).$$

Funkcija f v teh točkah doseže naslednje vrednosti:

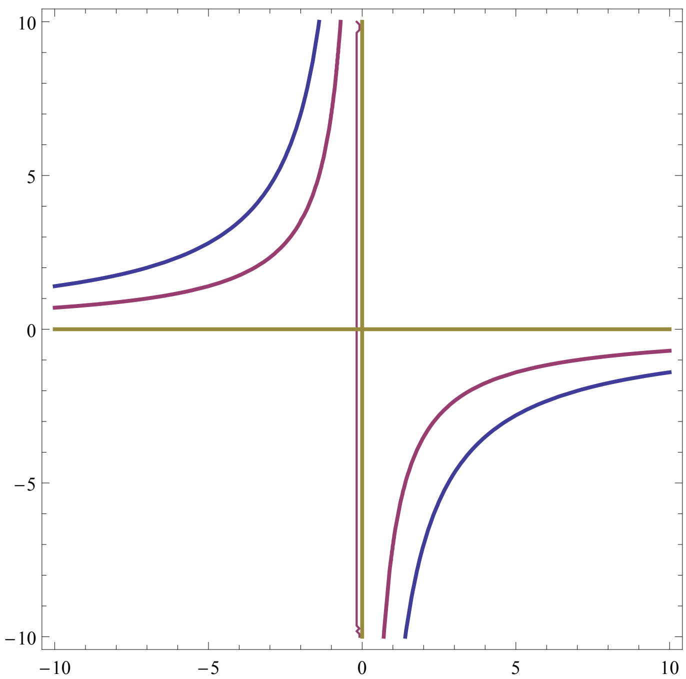
$$\begin{aligned} f(3,-3) &= 5, \\ f(-3,3) &= 5, \\ f(3,3) &= 23, \\ f(-3,-3) &= 23. \end{aligned}$$

Najmanjša vrednost funkcije f pri danem pogoju je torej enaka 5, največja pa 23.

b.) Nivojske krivulje so:

- *hiperboli $y = -\frac{14}{x}$ (ko je $z = 0$) in $y = -\frac{7}{x}$ (ko je $z = 7$) ter*
- *koordinatni križ z enačbo $xy = 0$ (ko je $z = 14$).*

Glejte spodnjo sliko.



Naloga 5 (20 točk)

Dana je diferencialna enačba $y''(x) + 3y'(x) + 4y(x) = 4x^2 - 2x$.

a.) Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe.

b.) Ali je funkcija $y(x) = e^{-\frac{3}{2}x} \sin(\frac{\sqrt{7}}{2}x)$ rešitev dane diferencialne enačbe? Odgovor utemeljite.

Rešitev:

a.) Dana je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda. Njena splošna rešitev je vsota rešitve homogene enačbe in partikularne rešitve: $y = y_h + y_p$.

- *Iz karakteristične enačbe homogenega dela*

$$\lambda^2 + 3\lambda + 4 = 0$$

dobimo $\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$. *Sledi rešitev homogene enačbe:*

$$y_h = C_1 e^{\left(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)x} + C_2 e^{\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)x} = D_1 e^{-\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + D_2 e^{-\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right).$$

- *Partikularno rešitev diferencialne enačbe lahko dobimo s polinomskim nastavkom*

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Potem ko nastavek odvedemo in vstavimo v enačbo, dobimo pogoje za nedoločene koeficiente iz nastavka:

$$\begin{aligned} 4A &= 4, \\ 6A + 4B &= -2, \\ 2A + 3B + 4C &= 0. \end{aligned}$$

Sledi partikularna rešitev:

$$y_p = x^2 - 2x + 1.$$

Splošna rešitev dane diferencialne enačbe je torej 2-parametrična družina funkcij

$$y = D_1 e^{-\frac{3}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + D_2 e^{-\frac{3}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + x^2 - 2x + 1.$$

b.) Funkcija $y(x) = e^{-\frac{3}{2}x} \sin(\frac{\sqrt{7}}{2}x)$ *ni članica zgornje družine (splošne rešitve). Da to ni rešitev dane diferencialne enačbe lahko vidimo tudi tako, da funkcijo odvedemo (izračunamo* y' *in* y''*) in preverimo, da enačbi ne zadošča.*