Matematika 2 - ustna vprašanja

1) Determinanta, poddeterminanta (1,3)

Definicija: Determinanta je predpis, ki kvadratni shemi $n \times n$ števil, priredi število $\mathbb{R}$. Predpis podamo induktivno:

$n=1 \Rightarrow |a|=a$

$$n=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Definicija: Determinanta, ki jo dobimo tako, da v prvotni determinanti prečrtamo ***i***-to vrstico in ***j***-ti stolpec, imenujemo poddeterminanta, ki pripada elementu a_{ij}

Definicija: Produkt $(-1)^{i+j}$ in poddeterminante, ki pripada elementu a_{ij} imenujemo **kofaktor** elementa a_{ij} .

2) Lastnosti determinante (5)

a) determinanta je enaka 0 , če:
- so v neki vrstici/stolpcu same 0
- sta dve vrstici proporcionalni(npr enaki/večkratnik)

b) vrednost determinante se ne spremeni če:
- zamenjamo vlogo vrstic in stolpcev
- katerikoli vrstici/stolpcu prištejemo večkratnik kake druge vrstice/stolpca.
- izpostavimo faktor, ki je skupen členom neke vrstice/stolpca

c) determinanta spremeni predznak, če zamenjamo 2 vrstici/stolpca

3) Cramerjevo pravilo (9)

za reševanje sistema n enačb z n neznankami na primeru $n=3$

$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1$

$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2$

$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3$

$$x=\frac{D_x}{D}, \quad y=\frac{D_y}{D}, \quad z=\frac{D_z}{D}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad D_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

4) Računanje z vektorji, kot med vektorij (11)

Seštevanje

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1, a_2, a_3)+(b_1, b_2, b_3)=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$

Lastnosti
- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
- $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
- $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

Množenje vektorja s skalarjem

$\alpha\vec{a}=(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$

Lastnosti:

$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$

$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$

$(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$

$1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

dolžina vektorja: $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ $\qquad \cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

5) Skalarni produkt vektorjev (16)

DEF: $\vec{a}=(a_{1,}a_{2,}a_3)$ $\vec{b}=(b_{1,}b_{2,}b_3)$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$ ← SKALAR

kompleksno(str 34) pa $\vec{z}\cdot\vec{w}=\overline{z_1}w_1+\overline{z_2}w_2+\overline{z_3}w_3$

Lastnosti:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot c=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$$

$$\boxed{(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot c\neq\vec{a}(\vec{b}\cdot c)}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\rho \qquad \Rightarrow\cos\rho=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

dokaz:

$$\cos\rho=\frac{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2}{2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\rho=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2-(a_3-b_3)^2$$

$$2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\rho=a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_1^2+b_2^2+b_3^2-a_1^2+2a_1b_1-b_1^2-a_2^2+2a_2b_2-b_2^{2\dots}$$

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\rho=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

6) Vektorski produkt vektorjev (21)

DEF: $\vec{a}=(a_{1,}a_{2,}a_3)$ $\vec{b}=(b_{1,}b_{2,}b_3)$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} \qquad \begin{array}{l}\vec{i}=(1,0,0)\\ \vec{j}=(0,1,0)\Rightarrow bazni\ vektorji\\ \vec{k}=(0,0,1)\end{array}$$

dolžina vektorja $\vec{a}\times\vec{b}$:

$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\rho\leftarrow$

paralelogram, ki ga oklepata $\vec{a}$ in $\vec{b}$

smer vektorja:

pravilo desnega vijaka

Lastnosti:

$\rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

$\rightarrow\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

$\boxed{\rightarrow\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}}$

7) Mešani produkt (26)

DEF: $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ $\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{ skalar}$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\vec{a}\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=-(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$$

TRDITEV: Absolutna vrednost mešanega produkta vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ je enaka prostornini **paralepipeda**, ki ga ti trije določajo.

DOKAZ: Prostornina paralepipeda je enaka **osnovni ploskvi** krat **višina**. Osnovna ploskev je paralelogram, ki ga oklepata vektorja $\vec{b}$ in $\vec{c}$, njegova ploščina $|\vec{a}\times\vec{b}|$, višina pa je projekcija vektorja $\vec{a}$ na $(\vec{b}\times\vec{c})$, torej skalarni produkt $\vec{a}\cdot\frac{(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|}$

slika 1.13

osn. Ploskev $|\vec{b}\times\vec{c}|$

Višina $\vec{a}\cdot\frac{(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|}$

Volumen $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

POSLEDICA: Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so **nekolinearni** natanko takrat, ko je determinanta različna od 0 .

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ In kolinearni $\Rightarrow V_{paralepipeda}=0\Rightarrow(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$

*kolinearnost: Vektorja sta kolinearna kadar ležita na isti premici

V piramide $=\frac{1}{6}V_{paralepipeda}$

težišče trikotnika $\vec{r}_T=\frac{1}{3}(\vec{r}_A+\vec{r}_B+\vec{r}_C)$

8) Couchy-Schwartzeva neenakost (17)

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$$

DOKAZ: $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\rho \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ $\quad \cos\rho\le 1$

9) Paralelogramska enačba (32)

Vsota kvadratov diagonal v paralelogramu = vsota kvadratov stranic

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$$

DOKAZ:
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$
$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}^2|-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}+\vec{b}|^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)$$

10) Enačba ravnine, enačba premice (30)

premica: $T_0(x_{0,} y_{0,} z_0)$ $\vec{e}=(a, b, c)$ smerni vektor

$\vec{r}_T=\vec{r}_{T_0}+t\vec{e}$ vektorska

$$x=x_0+t\,a$$
$$y=y_0+t\,b$$
$$z=z_0+t\,c$$

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

ravnina: (28) $T_0(x_{0,} y_{0,} z_0)$ $\vec{n}=(a, b, c)$ vektor normale

$(\vec{r}_T-\vec{r}_{T_0})\cdot\vec{n}=0$ **vektorska** oblika

$((x, y, z)-(x_{0,} y_{0,} z_0))(a, b, c)=0$

$\vec{n}=(a, b, c)$

$a\,x+b\,y+c\,z=a\,x_0+b\,y_0+c\,z_0=d$ **kanonična**

$\frac{x}{e}+\frac{y}{f}+\frac{z}{g}=1$ **segmentna**(e, f, g so točke kjer osi x, y, z prebadajo ravnino)

Lastnosti:

→ $d=0$ ravnina gre skozi koordinatno izhodišče

→ $c=0$ $\vec{n}=(a, b, 0)$ ravnina je vzporedna z osjo

→ $b=c=0$ $\vec{n}=(a, 0, 0)$ ravnina je vzporedna z ravnino (y, z)

Enačbo ravnine določene s točkami $A(a_{1,} a_{2,} a_3), B(b_{1,} b_{2,} b_3)$ in $C(c_{1,} c_{2,} c_3)$ lahko zapišemo v obliki

$$\begin{vmatrix} a_1-x & a_2-y & a_3-z \\ a_1-b_1 & a_2-b_2 & a_3-b_3 \\ a_1-c_1 & a_2-c_2 & a_3-c_3 \end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \text{ točka } T(x, y, z) \text{ leži v ravnini}$$

11) Razdalja med točkama, razdalja med točko in premico (32)

$$d(T_{1,} T_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$d(T, p)=\frac{|\vec{e}\times(\vec{r}_T-\vec{r}_{T_0})|}{|\vec{e}|}$$

DOKAZ: (ploščino paralelograma zapišiemo na 2 načina)

$pl=|\vec{e}\times\vec{T_0 T}|=|\vec{e}|\cdot d$ ← višina

12)Razdalja med točko in ravnino, razdalja med premicama, razdalja med premico in ravnino (32)

$$d(T,\Pi)=\frac{ax+by+cz-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

DOKAZ: $d=\vec{T}_0T\cdot\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{(x-x_0)a+(y-y_0)b+(z-z_0)c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$d(p_1,p_2)=\frac{|\vec{e}_1,\vec{e}_2,(\vec{r}_{T_1}-\vec{r}_{T_2})|}{|\vec{e}_1\times\vec{e}_2|}$$

DOKAZ: zapišimo $V_{paralepipeda}$ na 2 načina

$V=|(\vec{T}_1-\vec{T}_2,\vec{e}_1,\vec{e}_2)|=|\vec{e}_1\times\vec{e}_2|\cdot d \leftarrow$ višina

Opomba: razdalja med dvema premicama je enaka razdalji katerekoli točke na drugi premici od prve premice.

med premico in ravnino
a) premica in ravnina se sekata $\Rightarrow d(p,\Pi)=0$
b) premica in ravnina sta vzporedni $\Rightarrow d(p,\Pi)=d(T,\Pi)$

13) Računanje z matrikami (36)

13.1) Množenje s skalarjem (36)

$$\alpha\begin{bmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn}\end{bmatrix}$$

13.2) Seštevanje pogoj $A^{m\times n}+B^{m\times n}$ (37)

$$\begin{bmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_{11} & \dots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & \dots & b_{mn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix}$$

Lastnosti

$\rightarrow A+B=B+A$
$\rightarrow A+(B+C)=(A+B)+C$
$\rightarrow A+0=A \quad 0^{m\times n}=\begin{bmatrix}0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$ ničelna matrika
$\rightarrow A+(-A)=0$
$\rightarrow \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
$\rightarrow (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
$\rightarrow \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$
$\rightarrow 1\cdot A=A$

13.3)**Transponiranje** zamenjamo vrstice in stoplce (37)

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix} \qquad A^T=\begin{bmatrix}a_{11} & \dots & a_{m1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

Lastnosti:
$\rightarrow (A+B)^T=A^T+B^T$
$\rightarrow (\alpha A)^T=\alpha A^T$
$\rightarrow (A^T)^T=A$

13.4)**Množenje matrik** $A^{m\times n}\cdot B^{p\times r}=C^{m\cdot r}$ pogoj $n=p$ **(39)**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mr} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}$$

Lastnosti:

→ $A(B\cdot C)=(A\cdot B)C$

→ $(\alpha A)\cdot B=\alpha(A\cdot B)$

→ $A(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

→ $A\cdot B\neq B\cdot A$

→ $A\cdot I=I\cdot A=A$ $\quad I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ identiteta ! $A\rightarrow$ Kvadratna matrika

→ $\underset{\substack{m\times 0/T \\ 0\times m}}{(A\cdot B)^T}=\underset{\substack{0\times n \\ 0\times m}}{B^T}\cdot\underset{n\times m}{A^T}$ $\quad A^{m\times n}\cdot B^{n\times 0}$

13.5)**Kompleksne matrike (41)**
če matriko A konjugiramo in transponiramo dobimo njeno **adjungirano** matriko $A^*=(\overline{A})^T$

14) Rang matrike (49)

DEF: Rang matrike je red največje kvadratne marike v pravokotni matriki, ki ima determinanto različno od 0

Lastnosti:

→ $rang\,A=rang\,A^T$ (determinanta se ne spremeni, če zamenjamo vlogo vrstic in stolpcev)

→ Determinanta je enaka 0, če sta 2 vrstici linearno odvisni

TRDITEV: Rang matrike A je enak številu linearno neodvisnih vrstic/stolpcev matrike

Rang računamo tako, da začetno matriko z elementarnimi operacijami preoblikujemo do matrike, ki ima pod diagonalo 0 Število neničelnih vrstic je enako rangu matrike, saj so te vrstice linearno neodvisne.

TRDITEV: Vsaka matrika R je vrstično ekvivalentna matriki R', ki ima na prvem mestu **neničelni** element kvečjemu v prvi vrstici, v vsaki naslednji vrstici pa ima na začetku vsaj **eno ničlo več** kot v prejšnji... $\Rightarrow$ **Gaussova eliminacija**(50)

15) Inverzna matrika (46)

DEF: Naj bo A kvadratna matrika. Če obstaja taka matrika A^{-1}, da velja $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$, potem A^{-1} imenujemo inverz matrike A. A^{-1} Je tudi kvadratna matrika. Vendar nima vsaka kvadratna matrika inverza

TRDITEV: Kvadratna matrika A ima inverz natanko tedaj, ko je $det\,A\neq 0$

DOKAZ: Matrika nima inverza, če je $det\,A=0$, $(det\,A)\cdot(det\,A^{-1})=det(A\cdot A^{-1})=det\,I=1\neq 0$
Ni mogoče, da ima ta matrika inverz, ker je $det\,A=0$

$$A^{-1}=\frac{1}{det\,A}\begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ A_{m1} & \dots & A_{mn}\end{bmatrix}^T=\frac{1}{det\,A}(\tilde{A})^T$$

kofaktor matrike A: prečrtamo i-to vrstico in j-t stolpec ter izračunamo determinanto in pomnožimo $z(-1)^{T+j}$

$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

DOKAZ:
$$\begin{aligned}
(A\cdot B)^{-1}&=X\\
A\cdot B\cdot X&=I/A^{-1}\\
A^{-1}\cdot A\cdot B\cdot X&=A^{-1}\cdot I\\
I\cdot B\cdot X&=A^{-1}/B^{-1}\\
I\cdot X&=B^{-1}\cdot A^{-1}\\
X&=B^{-1}\cdot A^{-1}=(A\cdot B)^{-1}
\end{aligned}$$

Računanje inverza z Gaussovao elimiancijo:
z operacijami, ki ohranjajo rang prevedemo
$[A|I]\rightarrow[I|A^{-1}]$

Matrične enačbe:

A cdot X = B $\quad [A|B]\rightarrow[I|X]$ (enako kot pri linearnih enačbah)

$\underset{A^T}{X}\cdot\underset{X^T}{A}=\underset{B^T}{B}\ /^T \quad [A^T|B^T]\rightarrow[I|X^T]$

16) Posebne vrste matrik (44)

a) **simetrična** $A=A^T$

*diagonalna $\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0\\ 0 & d_2 & 0\\ 0 & 0 & d_n\end{bmatrix}$ Vsi elementi izven diagonale so enaki 0 ** $\begin{bmatrix} a\cdot a & a\cdot b & a\cdot c\\ b\cdot a & b\cdot b & b\cdot c\\ c\cdot a & c\cdot b & c\cdot c\end{bmatrix}$ elementi so medsebojni skalarni produkti treh vektorjev **a, b** in **c**

obstaja tudi **poševno simetrična** diagonalna matrika $A=-A^T$
vsako kvadratno matriko lahko zapišemo kot vsoto simetrične in poševno simetrične matrike.

b) **hermitska** (45) $A=A^*$
poševno hermitska $A=-A^*$

Vsako matriko lahko zapišemo kot

c) **unitarna** $A\cdot A^*=A^*\cdot A=I$
ortagonalna $A\cdot A^T=A^T\cdot A=I$

d) **singularna** (46) nima inverza
nesingularna ima inverz (obrnljiva matrika $detA\neq 0$)

e) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{vmatrix}$ **zgornje trikotna** matrika $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$ **spodnje trikotna** matrika

17) Sistem linearnih enačb (51)

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ \dots\ +a_{1n}x_n=b_1$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}+\ \dots\ +a_{mn}x_n=b_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad R=\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$ Razširjena matrika

$Če\ je\ b_1=b_2=\ \dots\ =b_m=0 \Rightarrow$ Homogen sistem

Osnovni izreki o reševanju sistema linearnih enačb

a) $r=rang\ A=rang\ R$ sistem ima rešitev
b) $r=n$ (n = št neznank) sistem ima 1 rešitev
c) $r<n$ sistem ima neskončno rešitev
za $(n-r)$ rešitev lahko izberemo poljubne vrednosti

Za **homogen sistem** $A \cdot X=0$
ima vedno trivialno rešitev $x_1=x_2=\ \dots\ =x_n=0$
ima netrivialno rešitev $rang\ A<n$

18) Gausova metoda za reševanje linearnih enačb (54)

TRDITEV: Vsaka matrika R je vrstično ekvivalentan matriki R', ki ima na prvem mestu numerični elemet kvečjem v prvi vrstici, v vsaki naslednji vrstici pa ima na začetku vsaj eno ničlo več kot v prejšnji.

Razširjeno matriko preoblikujemo do zgoraj trikotne matrike z elementarnimi operacijami, ki ne vplivajo na rešitev sistema linearnih enačb.

19) Vektorski prostor (59)

DEF: Neprazno množico ϑ imenujemo realen vektorski prostor, če je za elemente te množice definiramo seštevanje vektorja in množenje elementa te množice z realnim številom, ki zadošča lastnostim za množenje vektorja s skalarjem.

Dimenzija vektorskega prostora je enaka številu elementov baze, če je baza končna. Če pa je v bazi neskončno elementov pravimo, da je vektorski prostor neskončno dimenzioniran.

Primeri vektorskih prostorov
a) vektorji v ravnini ali prostoru
b) n-terice v $\mathbb{R}$, torej $\vartheta_n=\{a_1 \dots a_n\ ;\ a\in\mathbb{R}\}$
c) realne funkcije, torej $\vartheta=\{f-realna\ funkcija\}$
d) prostor matrik

20) Baza vektorskega prostora (65)

DEF: Baza vektorskega prostora je linearno neodvisna množica elementov, s katerimi lahko izrazimo vsak element vektorskega prostora-

Ti odvisni elementi, ki sestavljajo prostor se imenujejo **liearna ogrinjača vektorjev.**

Št. Baz = dimenzija vektorskega prostora

21) Linearna neodvisnost vektorjev (63)

Naj bodo $\vec{a}_1, \vec{a}_{2,} \dots \vec{a}_n \in \vartheta$, $\alpha_{1,} \alpha_{2,} \dots \alpha_n \in \mathbb{R}$

Potem je vektor $\vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n$

DEF: Množica vektorjev ϑ je linearno odvisna, če lahko vsaj en element te množice zapišemo kot linearno kombinacijo prostorskih elementov te množice.

Množica vektorjev ϑ je linearno neodvisna, če $\alpha_1 x_1 + \dots \alpha_n x_n = 0$ ni linearno odvisna natanko tedaj, ko je $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

22) linearna preslikava (71)

DEF: Preslikava $F : X \to Y$ je linearna, če velja:

a) $F(x+y)=F(x)+F(y)$ $x, y \in X$ aditivnost

b) $F(\alpha x)=\alpha F(x)$ $x \in \mathbb{R}$ $x \in X$ homogenost

TRDITEV: Matrika predstavlja linearno preslikavo in vsako linearno preslikavo lahko predstavimo z matriko.

DOKAZ(prvega dela): $AX + AY = A(X+Y)$

$A(\alpha X)=\alpha A X$

$F(X)=AX$ $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\begin{bmatrix} matrika \\ linearne \\ preslikave \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} matrika \\ „\ osnovnih\ “ \\ vektorjev \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} matrika \\ preslikanih \\ vektorjev \end{bmatrix}$$

Matrika ima za stolpce slike standardnih baznih vektorjev.

Transformacije ravnine(75)

- matrika za vretenje vektorja orog izhodišča ravnine

$$A(\alpha)=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

-matrika za razteg ravnine za s_x v smeri osi x in za s_y v smeri osi y

$S=\begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$ vektorju $\vec{r}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ pripada vektor $F(\vec{r})=\begin{bmatrix} s_x & x \\ s_y & y \end{bmatrix}$

Homogene koordinate(76)

Omogočajo, da hkrati opišemo vse linearne transformacije in **translacijo**. Homogene koordinate ravninskega vektorja $\vec{r}$ dobimo tako, da mu pripišemo še eno koordinato, ki je za vse vektorje enaka 1

$\vec{r}_n=\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ $R_\alpha=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin x & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vrtenje

$S_{S_x S_y}=\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ razteg

$T_{\vec{a}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ translacija(paralelni premik) (72/4)

Poljuben tog premik v ravnini lahko opišemo s temi tremi matrikami.

PRIMER: Vrtenje za $\pi/4$ okrog točke $(1,-1)$

POSTOPEK: točko premaknemo v izhodišče s paralelnim premiko, jo zavrtimo za $\pi/4$ okrog izhodišča in jo paralelno premaknemo nazaj v točko $(1,-1)$

$$V=T_{\vec{t}}\cdot R(\pi/4)\cdot T_{\vec{t}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ortagonalna linearna transformacija(78)

Ohranja skalarni produkt $F(\vec{x})\cdot F(\vec{y})=(A\vec{x})\cdot(A\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{y}$

Ohranja dolžine vektorjev in kot med vektorji

Matrika je ortagonalna, če je $A^T=A^{-1}$

Če je matrika ortagonalna je $det\ A=\pm 1$

Stolpec ortagonalne (in unitarne) matrike so vektorji dolžine 1, ki so med seboj parovno pravokotne

23) Lastne vrednosti, lastni vektorji matrike (80)

DEF: Naj bo A kvadratna matrika. Če za nek neničelni vektor $\vec{x}$ velja $A\vec{x}=\lambda\vec{x}$, potem λ imenujemo lastna vrednost A, vektor $\vec{x}$ pa tej lastni vrednosti pripadajoč lastni vektor.

RAČUNANJE LASTNIH VREDNOSTI

$A\cdot X=\lambda X$ $\quad X$ -matrika vektorjev

$A\cdot X-\lambda X=0$

$(A-\lambda I)X=0$

Dobimo homogen sistem n enačb z n neznankami pogoj za netrivialno rešitev $rang\, A<N$, torej $det(A-\lambda I)=0$ ... dobimo lastne vrednosti

Lastne vektorje matrike dobimo z rešitvijo enačbe $(A-\lambda I)X=0$ po gaussovi eliminaciji.

IZREK: Lastne vrednosti kvadratne matrike A reda n so ničle karakterističnega polinoma matrike, torej rešitve enačbe $(A-\lambda I)X=0$
Pripadajoči lastni vektorji so netrivialne rešitve homogenega sistema $(A-\lambda I)X=0$
Skupaj z vektorjem $\vec{0}$ sestavljajo vektorski prostor, katerega dimenzija je enaka $n-Rang(A-\lambda I)$

24) Lastne vrednosti hermitskih, poševno hermitskih, unitarnih marik (90)

IZREK: Naj bo $A^{n\times n}$
- če je A **hermitska**, so vse njeni lastne vrednosti REALNE
- če je A **poševno hermitska**, so vse njene lastne vrednosti **čista imaginarna števila**
- če je A **unitarna** , potem so vse njene lastne vrednosti po absolutni vrednosti enake 1

DOKAZ: $AX=\lambda X / \overline{X}^T$

$\overline{X}^T AX=\overline{X}^T\lambda X$

$$\overline{X}^T X=[\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3}]\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2\geq 0$$

$\lambda=\dfrac{\overline{X}^T AX}{\overline{X}^T X}$ kvadratna forma $\qquad |z|^2=z\overline{z}$

Če je A hermitska $(\overline{A}^T=A)$, potem je $\overline{X}^T AX$ kvadratna forma hermitske matrike, ki je realno število , torej je λ realno število, saj je kvocient dveh realnih števil.
Če je A poševno hermitska, potem je $\overline{X}^T AX$ kvadratna forma, ki je čisto imaginarno število.
λ Je tudi čisto imaginarno število , saj je kvocient imaginarnega in realnega števila

25) Funkcijska vrsta (definicija, definicijsko območje, konvergenca) (95)

DEFINICIJA: Funkcijska vrsta je definirana kot „neskončna vsota“ funkcij $U_1(x)+U_2(x)+U_3(x)+...$ to pomeni, da je definirana kot zaporedje delnih vsot funkcij
DEFINICIJSKO OBMOČJE funkcijske vrste je množica x , za katere funkcijska vrsta konvergira.
Funkcijska vsota je **konvergentna**, torej obstaja za tiste vrednosti spremenljivke x ,za katere konvergira številska vrsta, ki jo dobimo, ko konkreten x vstavimo v funkcijsko vrsto.
Funkcijska vrsta $S(x)=u_1(x)+u_2(x)+...$ je **enakomerno konvergentna** na intervalu $[a,b]$, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $n_0\in\mathbb{N}$, da je $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$ za vsak x in $[a,b]$. (Torej je pri izbranem ε za vsak x iz tega intervala dober isti n_0)

***če je funkcijska vrsta enakomerno konvergentna potem jo lahko členoma integriramo/odvajamo**

26) Potenčna vrsta (definicija, konvergenca) (99)

DEFINICIJA: Potenčna vrsta je funkcijska vrsta oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

DEFINICIJA: Naj bo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ potenčna vrsta, če obstaja $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_0}{a_0+1}| = R$ (R = konvergenči radij) potem jo imenujemo **konvergenčni polmer** potenčne vrste.

IZREK: Naj bo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ potenčna vrsta, potem ta potenčna vrsta konvergira za vsak $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ Za vsak x , ki ni element intervala $(x_0 - R, x_0 + R)$ potenčna vrsta divergira. Za $x = x_0 - R$ in $x = x_0 + R$ vrsta lahko konvergira ali divergira.

27) Odvajanje in integracija potenčnih vrst (99)

IZREK: Naj bo $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ Potem je $S(x)$ zvezna funkcija na $(x_0 - R, x_0 + R)$

Velja še:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x-x_0)^{n-1}$$

S'(x)= $a_1 + a_2 \cdot 2(x-x_0) + \dots$

$$\int S(x)\,dx + c = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$$

28) Taylorjeva vrsta funkcije f (100)

IZREK: Funkcija $f(x)$, ki se izraža kot vsota potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ s konvergenčnim polmerom R je zvezna in neskončnokrat odvedljiva na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je n -ti odvod $f^{(n)}(x)$ vsota potenčne vrste, ki jo dobimo, če vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ n -krat členoma odvajamo.

Koeficienti a_n dane vsote so natanko določeni z vrednostjo funkcije f in njenih odvodov v točki x_0 in so enaki $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$; $n \in \mathbb{N}$

skratka vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ je **taylorjeva vrsta** funkcije $f(x)$ okrog točke x_0

29) Taylorjeva vrsta funkcij: $e^x, \sin x, \cos x, \log(1+x)$ (101)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad ; x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad ; x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad ; x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad ; -1 < x \le 1$$

…

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad ; |x| < 1$$

poglejte si še 22 in 23 stran odgovorov na ustna vprašanja na http://stromar.si/uploads/notes/Mat2-Uni-Ustna.pdf

30) Binomska vrsta, binomski koeficienti ( )

$$(1+x)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+...$$

oznaka $\binom{m}{n}=\frac{m(m-1)(m-2)....(m-n+1)}{n!}$

lastnosti binomskega simbola:

1. če je $m\in\mathbb{N}$ potem je $\binom{m}{n}=\frac{m(m-1)(m-2)....(m-n+1)}{n!}$

$$\boxed{\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}}$$

2. $\binom{m}{n}=\binom{m}{m-n}$

3. vemo, da je $(1+x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m}{n}x^n$, ker je $m\in\mathbb{N}$, je $\binom{m}{n}=0$ za vsak $n>m$

4. $\binom{m}{0}=1$

31) Fouriejeva vrsta (definicija, konvergenca) (113)

DEFINICIJA: Funkcija $f\,\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ je periodična s periodo p , če je $f(x)=f(x+p)$ za vsak $x\in\mathbb{R}$

DEFINICIJA: Funkcijsko vrsto

$$a_0+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))=\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$$

trigonometrijska vrsta Za vse tiste x -e, kjer konvergira je periodična s periodo 2π

Naj bo f periodična funkcija s periodo 2π Denimo, da jo lahko razvijemo v trigonometrijsko vrsto

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2\mathrm{x}+...+b_1\sin x+b_2\sin 2\mathrm{x}+...=a_0+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

Zanimajo nas koeficienti – dobimo jih z integriranjem na intervalu $[-\pi\,\pi]$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$$

$f(x)=a_0+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ **-fouriejeva vsota funkcije** f

IZREK O KONVERGENCI FOURIERJEVE VRSTE

Naj bo f odsekoma zvezna periodična funkcija s periodo 2π za katero velja, da ima povsod levi in desni odvod. Potem lahko f razvijemo v **Fourierovo** vrsto $f(x)=a_0+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$, ki je konvergentna. Leva stran je enaka desni za vsak x razen za tiste x kjer funkcija f ni zvezna. Za te vrednosti spremenljivke je desna stran enaka aritmetični sredini leve in desne limite funkcije f

32) Fourierova vrsta s poljubno periodo (116)

$$f(x)=a_0+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{T}+b_n\sin\frac{n\pi x}{T})$$

$$a_0=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$$

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{T}\,dx$$

$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{T}\,dx$$

33) Sinusna Fouriejeva vrsta, kosinusna Fouriejeva vrsta (118)

a) Razvoj **lihe funkcije** $f(x)$ s periodo 2π v **sinusno** fourierjevo vrsto

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\sin(nx) \qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx \qquad a_0=a_n=0$$

b) Razvoj **sode funkcije** $f(x)$ s periodo 2π v **kosinusno** fourierjevo vrsto

$$f(x)=a_0+\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos(nx) \qquad a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \qquad b_n=0$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

Če je $f(x)$ liha, potem so vse funkcije f(x) cos(x), integral lihe funkcije na intervalu $[-\pi,\pi]$ pa je 0

Če je $f(x)$ soda, potem so vse funkcije $f(x)\sin nx$ lihe in odpadejo

Če je funkcija definirana na končnem intervalu (npr $[0,\pi]$)jo lahko razširimo v sodo ali liho periodično funkcijo Potem sodo funkcijo razvijemo v cosinusno Fourierjevo vrsto, liho pa v sinusno.

34) Funkcija dveh spremenljivk (definicija, zveznost, limita, graf) (125)

DEFINICIJA:

Funkcija dveh spremenljivk je preslikava, ki vsaki točki (x,y) ravninske množice D priredi realno število $z=f(x,y)$ torej preslikava $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

Množica D je definicisko območje funkcije f

ZVEZNOST:

Funkcija $f: D\to\mathbb{R}$ je zvezna v točki $(x_{0,}y_0)$, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja tak $\delta>0$, da je $|f(x_{0,}y_0)-f(x,y)|<\varepsilon$, čim je $(x_0-x)^2+(y_0-y)^2<\delta^2$

LIMITA:

Število L je limita funkcije $f(x,y)$, ko gre točka (x,y) proti točki (a,b)

$$L=\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) \ ;$$

če obstaja za vsak $\varepsilon>0$ tak $\delta>0$, da je $|f(x_{0,}y_0)-f(x,y)|<\varepsilon$ če je $0<(x-a)^2+(y-b)^2<\delta^2$

GRAF:

Naj bo $f: D\to\mathbb{R}\,;D\in\mathbb{R}^2$ funkcija dveh spremenljivk potem je njen graf $\Gamma(f)=\{(x,y),f(x,y);(x,y)\in D\}$ ploskev v prostoru $\mathbb{R}^3$

[pravokotna projekcija te ploskve na ravnino $z=0$ je definicijsko območje funkcije D ; pravokotna projekcija na os z pa je njena zaloga vrednosti]

35) Odvod funkcije več spremenljivk (137)

Naj bo $f: D \to \mathbb{R}; D \subset \mathbb{R}^2$ zvezna funkcija, če obstaja limita $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$ jo imenujemo **parcialni odvod funkcije** f po spremenljivki x in označimo $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=f_x(x,y)$

Podoben je parcialni odvod funkcije f po spremenljivki y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+k)-f(x,y)}{k}$$

DEFINICIJA: Funkcija f je diferencialna v točki (a,b) če obstajata parcialna odvoda $A=f_x(a,b)$ in $B=f_y(a,b)$ in je $\lim_{h,k\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-(Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$

IZRAZ: $d\,f=f_x dx+f_y dy$ imenujemo **totalni diferencial**

TRDITEV:

Če je funkcija f v točki (a,b) diferenciabilna potem je: $f(a+h,b+k)\approx f(a,b)+f_x h+f_y k$

36) Posredno odvajanje: $z=z(u,v);\ u=u(x,y);\ v=v(x,y);\ z_x, z_y$ (141)

verižno pravilo

Naj bo funkcija $z=f(x,y)$ diferenciabilna, spremenljivki x in y pa naj bosta odvedljivi funkciji parametra t ;torej $x=x(t)$ in $y=y(t)$ Potem je tudi $z=f(x(t),y(t))$ posredna funkcija parametra t in njen odvod je:

$$\frac{dz}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x(t+h),y(t+h))-f(x(t),y(t))}{h}$$

Naj bo $\Delta x=x(t+h)-x(t)$ in $\Delta y=y(t+h)-y(t)$ potem je:

$$\frac{dz}{dt}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f_x\Delta x+y\Delta y+\eta\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{h}=$$

$=\lim_{h\to 0} f_x\frac{\Delta x}{h}+f_y\frac{\Delta y}{h}+\eta\frac{1}{h}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, ker sta $x(t)$ in $y(t)$ odvedljivi funkciji $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta x}{h}=x'(t)$ in $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}=y'(t)$,ker pa je f diferenciabilna je $\lim_{h\to 0}\eta=0$ in

$$=\lim_{h\to 0}\eta\frac{1}{h}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\lim_{h\to 0}\eta(\pm\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})=0$$

Od tod sledi: $\boxed{\frac{dz}{dt}=f_x x'(t)+f_x(y)}$

37) Višji parcialni odvodi ( )

Naj bo f funkcija dveh spremenljivk , če njena parcialna odvoda obstajata in sta zopet parcialno odvedljiva ju lahko odvajamo in dobimo parcialne odvode drugega reda. Postopek lahko nadaljujemo in dobimo parcialne odvode višjega reda.

Če druga mešana parcialna odvoda f_{xy} in f_{yx} obstajata in sta zvezni funkciji sta enaka.

38) Taylorjeva vrsta funkcije dveh spremenljivk (147)

Funkcijo dveh spremenljivk lahko razvijemo po Taylorjevi formuli

Funkcija $f(x,y)$ naj bo $(n+1)$ krat zvezno parcialno odvedljiva na obe spremenljivki v okolici točke (a,b) v tem primeru velja:

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+[f_x(a,b)h+f_y(a,b)k]+...+\frac{1}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial^{n-i}x\,\partial^i y}(a,b)h^{n-i}k^i\right]+R_n \quad \text{kjer je}$$

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial^{n+1-i}x\,\partial^i y}(a+\theta h,b+\theta k)h^{n+1-i}k^i \quad \text{in} \quad 0\le\theta\le 1$$

39) Izrek o implicitni funkciji (149)

Naj bo F(x,y) zvezna in diferenciabilna funkcija v okolici točke (a,b) in naj bo $F(a,b)=0$ če $F_y(a,b)\neq 0$ obstaja odvedljiva funkcija $y=y(x)$, ki je definirana v neki okolici točke $a\in\mathbb{R}$ in zadošča pogojema: $y(a)=b$, $F(x,y(x))=0$ $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}$

*Izrek o implicitni funkciji velja tudi za funkcije več spremenljivk, ki zadoščajo ustreznim pogojem. V primeru, da je $z=z(x,y)$ podana implicitno $F(x,y,z(x,y))=0$ $Z_x=-\frac{F_x}{F_z}$ $Z_y=-\frac{F_y}{F_z}$

40) Ekstrem funkcije dveh spremenljivk (152)

Funkcija $f=f(x,y)$ ima v točki (a,b) maximum, če velja:
$f(a+h,b+k)-f(a,b)<0$

Funkcija ima v točki (a,b) minimum, če velja $f(a+h,b+k)-f(a,b)>0$

Če je v točki (a,b) ekstremi potem sta parcialna odvoda funkcije v tej točki enaka nič. $f_x(a,b)=0$ in $f_y(a,b)=0$ Ta pogoj je potreben ne pa zadosten za nastop ekstrema. Če sta v točki (a,b) oba parcialna odvoda enaka 0, potem to točko imenujemo **stacionarna točka**, ki je kandidat za ekstrem.

Zadosten pogoj za nastop ekstrema:
naj bo (a,b) stacionarna točka dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije $f(x,y)$ naj boda $A=f_{xx}(a,b)$, $B=f_{xy}(a,b)$ in $C=f_{yy}(a,b)$

Velja: $Ah^2+2Bhk+Ck^2=\frac{(Ah+Bk)^2+(AC-B^2)k^2}{A}$

Sledi:
če je $AC-B^2>0$ je izraz pozitiven
a) $A>0$ je celoten izraz pozitiven, torej je v (a,b) minimum
b) $A<0$ je celoten izraz negativen, torej je v (a,b) maximum

c) če je $AC-B^2<0$ prvi različnih h in k je celoten izraz pozitiven ali negativen, ni ekstrema ampak je **sedlo**.
d) če je $AC-B^2=0$ potem nam drugi odvod ne pove dovolj.

41) Hessejeva matrika (154)

Hessejeva matrika je matrika drugih parcialnih odvodov

$$H(x,y)=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

običajno je $f_{xy}=f_{yx}\Rightarrow H(x,y)$ simetrična matrika

$H(a,b)=\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ in $AC-B^2=det(H(a,b))$

naj bo f funkcija spremenljivk x in y in naj bo (a,b) stacionarna točka, torej:
$f_x(a,b)=0$ in $f_y(a,b)=0$

Potem velja:
če je $det(H(a,b))>0$ je v (a,b) ekstrem, in sicer
a) $f_{xx}(a,b)>0$ je ekstrem minimum
b) $f_{xx}(a,b)<0$ je ekstrem maximum

če je $det(H(a,b))<0$ je v (a,b) sedlo
če je $det(H(a,b))=0$ ne vemo

42) Vezani ekstrem funkcije dveh spremenljivk (159)

Naj bo funkcija $f(x,y)$ definirana na območju $D\subseteq\mathbb{R}^2$ in $g(x,y)=0$ implicitna enačba neke krivulje v D Vezani ekstrem je ekstrem funkcije $f(x,y)$ ne množici točk, ki zadoščajo pogoju $f(x,y)=0$ Drugače povedano vezani ekstrem je ekstrem funkcije f nad dano krivuljo.

??LAGRANGOVA METODA?? prepiši z neta

43) Diferencialna enačba (definicija, začetni problem, robni problem) (163)

Navadna diferencialna enačba je zveza med neodvisno spremenljivko x odvisno spremenljivko y in njenimi odvodi $F(x, y, y', ..., y^{(n)})=0$

Parcialne diferencialne enačbe povezujejo dve ali več neodvisnih spremenljivk , odvisno spremenljviko in nejne parcialne odvode.

Red diferencialne enačbe je red najvišjega odvoda v enačbi

npr. diferencialna enačba 1. reda: $F(y', y, x)=0$

Rešitev diferencialne enačbe v kateri nastopa poljubna konstanta imenujemo **splošna rešitev** diferencialne enačbe. Točno določeno rešitev pa imenujemo **partikularna rešitev**.

Partikularno rešitev dobimo tako, da podamo še dodaten pogoj

Začetni pogoj $y(x)=y_0$

Robni pogoj (npr. strmina je v krajiščih vpeta)

44) Diferencialna enačba z ločljivimi spremenljivkami (170)

$y'=f(x, y)$ razpade na $y'=g(x)h(y)$, ker je $y'=\frac{dy}{dx}$ dobimo $\frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$ nato ločeno integriramo obe strani enačebe $\Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx+C$

45) Linearna diferencialna enačba 1. reda (homogena , nehmogena) (173,174)

DEFINICIJA: Diferencialna enačba oblike $y'+f(x)y=g(x)$ se imenuje **linearna** diferencialna enačba prvega reda.

Odvisni spremenljivki y' in y nastopata linarno funkciji f in g kot funkciji spremenljivke x pa sta poljubni

če je $g(x)=0$ za vsak x potem je enačba $y'+f(x)y=0$

HOMOGENA:

$y'=f(\frac{y}{x})$ uvedba nove spremenljivke: $u=\frac{u}{y}$ $y'=u'x+u$

NEHOMOGENA LINEARNA ENAČBA:

$y'+f(x)y \pm g(x)$

Rešitev je oblike $y(x)=y_H(x)+y_P(x)$, pri čemer $y_H(x)$ je rešitev homogenega dela enačbe, $y_P(x)$ pa neka partikularna rešitev, ki jo dobimo z **variacijo konstante**.

46) Bernoullijeva diferencialna enačba (177)

enačbo oblike $y'+f(x)y=g(x)y^n$ kjer sta $f(x)$ in $g(x)$ zvezni funkciji spremenljivke x in $n\neq 0$ ter $n\neq 1$ imenujemo **Bernoullijeva enačba** z vpeljavo nove odvisne spremenljivke jo lahko prevedemo na linearno enačbo

*delimo z y^n , da jo prevedemo v linearno enačbo $y^{-n}y'+f(x)y^{-n+1}=g(x)$

*vpeljemo novo odvisno spremenljivko z predpisom $z=y^{-n+1}$ odvajamo $z'=(-n+1)y^{-n}y'$ ter vstavimo v prvotno enačbo, da dobimo: $z'+(-n+1)fz=(-n+1)g$

47) Eksaktna diferencialna enačba (178)

Vsako diferencialno enačbo $y'=f(x, y)$ lahko zapišemo v obliki

$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$

Funkciji M in N v enačbi sta funkciji dveh neodvisnih spremenljivk.

DEFINICIJA: Diferencialna enačba $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ je eksaktna, če sta M in N obe zvezno parcialno odvedljivi na obe spremenljivki in velja, da je $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

pri eksaktni enačbi lahko z integrigiranjem najdemo tako funkcijo $F(x, y)$,da je $\frac{\partial F}{\partial x}=M$ $\frac{\partial F}{\partial y}=N$

Tako je na levi strani $M(x, y)dx+N(x, y)dy$ totalni diferencial funkcije $F(x, y)$ in enačbo lahko zapišemo kot $dF(x, y)=0$

Splošna rešitev eksaktne diferencialne enačbe je tako implicitno podana z enačbo $F(x, y)=C$

48) Vpeljava parametra v diferencialno enačbo: $F(x, y')=0;\ x=\varphi(y')$

- Enačba ne vsebuje odvisne spremenljivke (y) $\Rightarrow$ $F(x, y')=0$; včasih y' ne moremo eksplicitno izraziti z x , lahko pa obratno izrazimo x z y' torej $x=\varphi(y')$ to enačbo diferenciramo in vpeljemo parameter $p=y'$ $dx=\varphi(p)dp$, ker pa je $dy=p\,dx$, je tudi $dy=p\varphi'(p)dp$ torej $y(p)=\int p\varphi(p)\,dp$

Rešitev v parametrični obliki je: $x(p)=\varphi(p);\quad y(p)=\int p\varphi'(p)dp$

- Enačba ne vsebuje (x) Tudi enačbo $F(y, y')=0$ lahko včasih rešimo tako, da izrazimo y kot funkcijo y' $y=\psi(y')$ diferenciramo, delimo z y' , vpeljemo $y'=p$ in upoštevamo, da velja zveza $dx=\frac{dy}{p}=\frac{\psi'(p)}{p}dp$, integriramo in dobimo rešitev, spet v parametrični obliki $x=\int\frac{\psi'(p)}{p}dp\ ,\quad y=\psi(p)$

49) Ortagonalne trajektorije (186)

DEFINICIJA: Naj bo podana enoparametrična družina krivulj v ravnini. Potem krivuljo, ki je pravokotna na vse krivulje dane družine imenujemo **ortagonalna trajektorija**.

Ortagonalna trajektorija ima smerni koeficient tangente v dani točki enak $-1/k$ pri čemer je k smerni koeficent prvotne krivulje v dani točki.

Če torej za družino krivulj velja diferencialna enačba y' = f(x,y), potem za ortagonalne trajektorije velja diferencialna enačba: $\frac{-1}{y'}=f(x, y)$ oz $y'=-\frac{1}{f(x,y)}$

50) Eksistenca in enoličnost rešitve diferencialne enačba $y'=f(x, y),\ y(x_0)=y_0$ (190)

~problem ima lahko eno rešitev, neskončno rešitev ali pa rešitve nima

EKSISTENČNI IZREK:

Naj bo dan začeni problem $y'=f(x, y)$ in $y(x_0)=y_0$ Če je f zvezna in omejena na nekem območju $Q=\{f(x,y);\ |x-x_0|<a\ ,\ |y-y_0|<b\}$ torej $|f(x,y)|<M;\ (x, y)\in Q$ potem rešitev obstaja, če je dodatno omejen tudi parcialni odvod na tem območju , torej $|f_y(x,y)|<N$ je rešitev natanko ena. Dobimo jo lahko s pomočjo **picardove** iteraijske metode:

$$y(n)(x)=y_0+\int_0^x f(t, y_{n-1}(t))\,dt$$

$|f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)|<M|y_1-y_2|$ **lipschitzov pogoj**

IZREK O ENOLIČNOSTI REŠITVE

če so vsi pogoji eksistenčnega izreka izpolnjeni je rešitev začetnega problema natanko določena na intervalu $[x_0-\beta, x_0+\beta]$ kjer je β manjši od števil a in b/M in $1/N$

EKSISTENČNI IZREK:

Funkcija $f(x,y)$ naj bo definirano zvezna in omejena z $|f(x,y)|<M$ v vseh točkah pravokotnika , če za $\{f(x, y);\ |x-x_0|<a,\ |y-y_0|<b\}$ obstaja taka konstanta N , da je $|f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)|<N|y_1-y_2|$ za poljubni točki (x, y_1) in (x, y_2) iz Q , ima začetni problem vsaj eno rešitev $y(x)$, ki je definirana na intervalu $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$, kjer je α manjša od števil a in b/M **lipschitzov pogoj**

51) Splošna rešitev linearne diferencialne enačbe drugega reda (194)

$F(x, y, y', y'')=0$

splošna rešitev je dvoparamtrična družina funkcij $y=y(x, C_1, C_2)$

Da bi lahko določili vrednost obeh konstant potrebujemo 2 dodatna pogoja.

Začetni pogoj: $y(x_0)=y_0:\ y'(x_0)=z_0$

52) Linearna diferencialna enačba drugega reda homogena s konstantnimi koeficienti (201,208)

IZREK: Splošna rešitev linearne diferencialne enačbe 2.ga reda homogene $y''+f_1(x)y'+f_0(x)y=0$ potem je enaka $y_H=c_1y_1+c_2y_2$ pri čemer sta y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi diferencialne enačbe: $y''=f_1(x)y'+f_0(x)y=0$

IZREK: Linearno diferencialno enačbo oblike $y''+ay'+by=0$ imenujemo homogena linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti. Rešitev poiščemo z nastavkom: $y=e^{rx}$,nastavek odvajamo, vstavimo v enačbo in dobimo: $r^2+ar+b=0$ to je **karakteristična enačba** (lahko ima 2 realni rešitvi, 1 realno ali konjugiran par kompleksnih števil)

a) DVE RELANI REŠITVI:

$r_1 \neq r_2 \quad \Rightarrow \quad y_1=e^{r_1x} \qquad y_2=e^{r_2x}$

$y_H=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

b) ENA RELANA REŠITEV:

$r_1=r_2 \quad \Rightarrow \quad y_1=e^{r_1x} \qquad y_2=e^{r_1x}$

$y_H=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_1x}$

c) DVE KOMPLEKSNI REŠITVI:

$r_1=p+iq \qquad r_2=p-iq$

$y_1=e^{r_1x}=e^{(p+iq)x} \qquad y_2=e^{r_2x}=e^{(p-iq)x}$

Splošna rešitev:

$$y_H=k_1e^{r_1x}+k_2e^{r_2x}=k_1(e^{px}e^{iqx})+k_2(e^{px}e^{-iqx})=e^{px}(k_1(\cos(qx)+i\sin(qx))+k_2(\cos(qx)+i\sin(qx)))=$$
$$=e^{px}(C_1\cos(qx)+C_2\sin(qx))=y_H$$

53) Determinanta Wronskega (linearna odvisnost funkcij) (199, 209)

DEFINICIJA: Naj bosta y_1 in y_2 funkciji. Potem definiramo determinanto Wronskega:

$$W(x)=\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}=y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)$$ **funkcijska determinanta**

TRDITEV: Naj bosta y_1 in y_2 rešitvi homogene diferencialne enačbe $y''+f_1(x)y'+f(x)y=0$ če je $W(x)\neq 0$ za vsak x potem sta y_1 in y_2 linearno neodvisno neodvisni rešitvi.
Če obstaja nek x_0 , tako da je $W(x_0)=0$, potem je $W(x)=0$ za vsak x . V tem primeru sta rešitvi y_1 in y_2 linearno odvisni.

54) Linearna diferencialna enačba s konstantimi koeficienti, 2. reda, nehomogena (212)

Splošna rešitev enačbe $y''(x)+f_1(x)y'(x)+f_0(x)y(x)=r(x)$ je $y(x)=y_n(x)+y_p(x)$ pri čemer je y_H rešitev homogenega dela; y_P pa partikularna rešitev.
Partikularno rešitev poiščemo na 2 načina:
a) z nastavkom, če je r(x) lepa funkcija:
- če je $r(x)$ polinom, za nastavek vzamemo polinom iste stopnje
- če je $r(x)=\sin x$ ali $\cos x$
- če je $r(x)=e^{ax}$; $y_P A e^{kx}$

b) z metodo variacije konstante

55) Nehomogena linearna diferencialna enačba 2. reda (212)

56) Eulerjeva diferencialna enačba 2. reda (205)

$x^{2}{}''+a\,x\,y'+b\,y=0$

Rešimo jo tako, da uvedemo novo spremenljivko $x=e^{t}$ in jo nato prevedemo na enačbo s konstantnimi koeficienti.

~poiščemo rešitve karakteristične enačbe $y=e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^{2}+(a-1)\lambda+b=0$

a) DVE RAZLIČNI REŠITVI λ_1 in λ_2 :

$y(t)=C_1 e^{\lambda_1 t}+C_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow y(x)=C_1 x^{\lambda_1}+C_2 x^{\lambda_2}$

b) DVE ENAKI REŠITVI λ_1 in λ_2 :

$y(x)=C_1 x^{\lambda_1}+C_2 \ln x \cdot x^{\lambda_2}$

c) KOMPLEKSNI PAR:

$\lambda_1=p+i\,q \quad \lambda_2=p-i\,q$

$y(x)=x^{P}(C_1\cos(q\ln x)+C_2\sin(q\ln x))$

57) Reševanje nehomogena linearne diferencialne enačbe s konstantimi koeficienti višjega reda s pomočjo nastavka

58) Sistem diferencialnih enačb (223)

Sistem diferencialnih enačb 1. reda za dve neznai funkciji $y_1(x)$ in $y_2(x)$ izgleda takole

$y_1'=f_1(x,y_{1,}y_2) \quad y_2'=f_2(x,y_{1,}y_2)$

Zapišemo ga lahko tudi v vektorski obliki, če je

$y(x)=\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}$ in $y(x,y_1,y_2)=\begin{bmatrix} f(x,y_1,y_2) \\ f(x,y_1,y_2) \end{bmatrix}$ je $y'=f(x,y_{1,}y_2)$

Tak sistem je ekvivalenten eni sami diferencialni enačbi 2. reda, ki jo dobimo tako, da prvo enačbo odvajamo po neodvisni spremenljivki x

$$y_1''=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}y_1'+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}y_2'$$

Iz prve enačbe sistema izrazimo y_2 in vstavimo namesto ∂y_2 , tako da dobimo diferencilano enačbo 2. reda $y_1''=F(x,y_1,y_1')$ za $y_1(x)$