1. Kolokvij matematike 2

Prva skupina april 1996

1. Določi enačbo ravnine, v kateri leži premica, določena s presečiščem dveh ravnin $x + y + z = a$, $-x + y + z = 1$ in gre skozi koordinatno izhodišče. Obravnavaj rešljivost naloge glede na vrednost parametra a.

   - Če je $a \neq 0$, potem drugo enačbo pomnožimo a in odštejemo od prve in dobimo $(a + 1)x + (1 - a)y + (1 - a)z = 0$.
   - Naloga je rešljiva za vse a.

2. Poišči matriko linearne preslikave, ki predstavlja zrcaljenje preko ravnine $x+y+z = 0$. Določi lastne vektorje in lastne vrednosti te matrike.

   - Zrcalna točko $\vec{r}^*$ k točki $\vec{r}$ glede na ravnino $\vec{n}\vec{r} = d$ je $\vec{r}^* = \vec{r} - 2\frac{\vec{n}\vec{r}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$
   - Matrika $\mathbf{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
   - Lastni vektor je $[1, 1, 1]^T$ z lastno vrednostjo $\lambda = -1$ in $[x, y, z]^T$, kjer je $x + y + z = 0$ z lastno vrednostjo $\lambda = 1$.

3. Določi konvergenčno območje naslednje funkcijske vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$

   - Če je $|x| \geq 1$, potem limita splošnega člena ni enaka nič in vrsta divergira.
   - Če je $|x| < 1$, potem velja $\lim_n \sqrt[n]{|\frac{x^n}{1+x^n}|} = |x|$ in vrsta konvergira.

4. Razvij v Taylorjevo vrsto funkcijo $f(x) = \int_{-\infty}^{x} te^{-t^2}\,dt$ v okolici točke $x_0 = 0$ in določi konvergenčno območje.

   - $\int_{-\infty}^{x} te^{-t^2}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-x^2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$
   - Vrsta konvergira za vse x.

1. Kolokvij matematike 2
Druga skupina april 1996

1. Določi enačbo ravnine, v kateri leži premica, določena s presečiščem dveh ravnin $ax + y + z = d$ in $-x + y + z = d$ in gre skozi koordinatno izhodišče. Določi za katere vrednosti parametra a in d ima naloge enolično rešitev, kdaj večlično in kdaj nima rešitve.

   - Odštejemo obe enačbi. $(a+1)x = 0$
   - Če je $a \neq -1$ in $d \neq 0$, je naloga enolično rešljiva.
   - Če je $a \neq -1$ in $d = 0$, ima naloga neskončno rešitev.
   - Če je $a = -1$ naloga ni rešliva (nimamo premice).

2. Poišči matriko linearne preslikave $f(\vec{r}) = (\vec{\imath} \times \vec{r}) \times \vec{\jmath}$, kjer je $\vec{\imath} = [1,0,0]^T$ in $\vec{\jmath} = [0,1,0]^T$. Določi realne lastne vektorje in realne lastne vrednosti te matrike.

   - $([1,0,0]^T \times [x,y,z]^T) \times [0,1,0]^T = [-y,0,0]^T$
   - $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   - lastna vektorja sta $[1,0,0]^T$ in $[0,0,1]^T$, ki pripadata lastni vrednosti $\lambda = 0$.

3. Določi konvergenčno območje naslednje funkcijske vrste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^{2n}}$

   - Ocenimo $\left|\frac{1}{n^2+x^{2n}}\right| \leq \frac{1}{n^2}$
   - Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, naša vrsta enakomerno konverira za vse x.

4. Razvij v Taylorjevo vrsto funkcijo $f(x) = \int_x^{\infty} te^{-t^2}\,dt$ v okolici točke $x_0 = 0$ in določi konvergenčno območje.

   - $\int_x^{\infty} te^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}e^{-x^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$
   - Vrsta konvergira za vse x.