1. kolokvij iz Matematike 2

1. letnik elektrotehnike (UNI)

3.4.2001

1. Dani sta premici:

$$p_1 \,:\, \tfrac{x-8}{k} = \tfrac{y-4}{5} = \tfrac{z-6}{4}$$

$$p_2 \,:\, \tfrac{x-7}{2} = \tfrac{y+4}{-3} = \tfrac{z-3}{1}$$

   (a) Določi parameter k tako, da se bosta premici p_1 in p_2 sekali in izračunaj njuno presečišče.

   (b) Zapiši enačbo ravnine, na kateri ležita premici p_1 in p_2.

2. Reši sistem linearnih enačb z uporabo Gaussove metode:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 2 \\ x - z &= 1 \\ 5x - 2y - z &= -1 \end{aligned}$$

3. Dana je matrika:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 3 & 3 & -1 \\ 9 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

   (a) Določi vrednost parametra k, pri kateri je 0 lastna vrednost matrike A.

   (b) Določi še preostale lastne vrednosti matrike A in izračunaj lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 0.

Pravilno rešen kolokvij je vreden 50 točk, ki so po nalogah razporejene takole: 1a - 10 točk, 1b - 10 točk, 2 - 10 točk, 3a - 10 točk, 3b - 10 točk.

Čas reševanja kolokvija je 55 minut. Veliko sreče pri reševanju!

Naloga	Točke
1a	
1b	
2	
3a	
3b	
Skupaj	

1.naloga: Dani sta premici:

$$p_1 \ : \ \frac{x-8}{k} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-6}{4}$$

$$p_2 \ : \ \frac{x-7}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-3}{1}$$

(a) Določi parameter k tako, da se bosta premici p_1 in p_2 sekali in izračunaj njuno presečišče.

(b) Zapiši enačbo ravnine, na kateri ležita premici p_1 in p_2.

Rešitev:
(a) Premici zapišemo v parametrični obliki z različnima parametroma:

$$\begin{aligned} p_1 \ &: \ x = 8 + kt, \ y = 4 + 5t, \ z = 6 + 4t \\ p_2 \ &: \ x = 7 + 2s, \ y = -4 - 3s, \ z = 3 + s \end{aligned}$$

Po izenačenju koordinat dobimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} 8 + kt &= 7 + 2s \\ 4 + 5t &= -4 - 3s \\ 6 + 4t &= 3 + s \end{aligned}$$

Rešimo ga: $t = -1$, $s = -1$, $k = 3$ in rešitev vstavimo v eno izmed parametričnih enačb, da dobimo presečišče $T(5, -1, 2)$.

(b) Normala ravnine, v kateri ležita dani premici, je vektorski produkt obeh smernih vektorjev:

$$\vec{n} = \vec{e_1} \times \vec{e_2} = (3, 5, 4) \times (2, -3, 1) = (17, 5, -19).$$

Enačba ravnine je tedaj $17x + 5y - 19z - d = 0$, kjer d dobimo kot skalarni produkt točke na eni izmed premic (npr. na p_2) z normalo: $d = (17, 5, -19) \cdot (7, -4, 3) = 42$ Iskana enačba ravnine je torej $17x + 5y - 19z - 42 = 0$.

2.naloga: Reši sistem linearnih enačb z uporabo Gaussove metode:

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 2 \\ x - z &= 1 \\ 5x - 2y - z &= -1 \end{aligned}$$

Rešitev: Rešujemo po Gaussu:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -6 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Ranga osnovne in z desno stranjo sistema razširjene matrike sta različna (prvi je 2 in drugi 3), zato sistem nima rešitve.

3.naloga: Dana je matrika:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 3 & 3 & -1 \\ 9 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

(a) Določi vrednost parametra k, pri kateri je 0 lastna vrednost matrike A.

(b) Določi še preostale lastne vrednosti matrike A in izračunaj lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 0.

Rešitev:
(a) Izračunamo $det(A - \lambda I)$:

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & k \\ 3 & 3-\lambda & -1 \\ 9 & 9 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + (9k-1)\lambda.$$

Ničla bo lastna vrednost matrike A, kadar bo njen karakteristični polinom $det(A - \lambda I)$ deljiv z λ, to pa je vedno, se pravi da je k lahko poljubno realno število.

(b) Izračunali smo že, da je

$$det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + (9k-1)\lambda.$$

Poleg $\lambda_1 = 0$ sta torej lastni vrednost še ničli kvadratnega polinoma $-\lambda^2 + 2\lambda + (9k-1)$, to pa sta $\lambda_2 = 1 + 3\sqrt{k}$ in $\lambda_3 = 1 - 3\sqrt{k}$. Lastni vektor, ki ustreza lastni vrednosti 0, je $\vec{x}_1 = (1, -1, 0)$. Izračunamo ga kot rešitev homogenega sistema $(A - \lambda_1 I) \cdot \vec{x} = 0$.