1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

6. april 2005

1. [10T] Dane so točke $A(4,1,2)$, $B(5,1,1)$ in $C(5,2,2)$. Zapiši enačbo ravnine Π, ki jo določajo točke A, B in C, ter kot, ki ga oklepata vektorja $\vec{AB}$ in $\vec{AC}$.
Rešitev:
Zapišimo najprej dva vektorja v ravnini.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{AB} = (1,0,-1)\\ \vec{b} &= \vec{AC} = (1,1,0)\end{aligned}$$

Za zapis enačbe ravnine potrebujemo normalni vektor, ki ga dobimo kot vektorski produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,1)$$

Izračunajmo še koeficient d:

$$d = (1,-1,1)\cdot(4,1,2) = 5.$$

Enačba ravnine se torej glasi:

$$x - y + z = 5.$$

Kot φ med vektorjem $\vec{a}$ in $\vec{b}$ izračunamo s sledečo formulo.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

2. [10T] Izračunaj rang matrike X, ki je podana z $X = (3A + B^T) \cdot C$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resitev:

$$\begin{aligned} X &= (3A + B^T) \cdot C \\ &= \left(\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -9 & 12 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 11 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -6 & -16 & -1 & -11 \\ 2 & -12 & 9 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ -6 & -16 & -1 & -11 \\ 2 & -12 & 9 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -16 & 8 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(X) = 2$$

3. [15T] Določi lastne vrednosti matrike A in lastni vektor, ki pripada po absolutni vrednosti najmanjši lastni vrednosti.

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 4 \\ -4 & 3 & 4 \\ -7 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Rešitev:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -6-\lambda & 5 & 4 \\ -4 & 3-\lambda & 4 \\ -7 & 5 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 \\ &= (\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Lastne vrednosti so torej: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = 3$.
Po absolutni vrednosti najmanjša lastna vrednost je 1.

$$A - I = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & 4 \\ -7 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 1 je torej $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. [15T] Kateremu pogoju morajo zadoščati parametri a, b in c, da bo spodnji sistem enačb rešljiv? Reši sistem za vrednosti parametrov $a = -12$, $b = 7$ in $c = -9$.

$$\begin{aligned} 2x - 7y - 7z &= a \\ -x + 2y + 3z &= b \\ x + y - 2z &= c \end{aligned}$$

Rešitev:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -7 & -7 & a \\ -1 & 2 & 3 & b \\ 1 & 1 & -2 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & c \\ -1 & 2 & 3 & b \\ 2 & -7 & -7 & a \end{array}\right]$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & c \\ 0 & 3 & 1 & b+c \\ 0 & -9 & -3 & a-2c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & c \\ 0 & 3 & 1 & b+c \\ 0 & 0 & 0 & a+3b+c \end{array}\right]$$

Da bo sistem rešljiv, mora biti izpolnjen pogoj $a + 3b + c = 0$.
Dani $a = -12$, $b = 7$ in $c = -9$ temu pogoju zadoščajo, torej ima sistem rešitev. Ker je rang za 1 manjši od števila neznank, dobimo 1-parametrično družino rešitev:

$$\begin{aligned} y &= t, \\ z &= -3t - 2, \\ x &= -7t - 13. \end{aligned}$$