

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

3. april 2006

1. [25T] Dana je tristrana piramida, ki je podana z oglišči $A(1, 1, 1)$, $B(9, 4, -1)$, $C(-2, 3, 4)$ in $D(1, 0, 2)$. Izračunaj dolžino višine, ki gre skozi oglišče B .

Rešitev:

Označimo vektorje:

$$\vec{a} = \vec{AC} = (-3, 2, 3)$$

$$\vec{b} = \vec{AD} = (0, -1, 1)$$

$$\vec{c} = \vec{AB} = (8, 3, -2)$$

Volumen tristrane piramide lahko izračunamo na dva načina (po formuli za volumen piramide in iz volumna paralelepipeda):

$$V_{pir} = \frac{1}{3}O \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot v = \frac{1}{6}|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot v,$$

$$V_{pir} = \frac{1}{6}V_{par} = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Ti dve formuli izenačimo in dobimo formulo za višino:

$$v = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Izračunajmo najprej vektorski produkt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (5, 3, 3).$$

Dolžina tega vektorja je:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |(5, 3, 3)| = \sqrt{25 + 9 + 9} = \sqrt{43}.$$

Sedaj izračunajmo še mešani produkt:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 16 + 24 + 9 = 43.$$

Sedaj lahko izračunamo dolžino višine:

$$v = \frac{|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{43}{\sqrt{43}} = \sqrt{43}.$$

2. [25T] Izračunaj kot med premico

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{1}$$

in ravnino

$$x + 2y - z = 9.$$

Resitev:

Kot med premico in ravnino označimo s φ . Velja: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, kjer je α kot med smernim vektorjem premice in normalo ravnine. Smerni vektor \vec{e} premice in normalo \vec{n} ravnine preberemo iz enačb premice in ravnine:

$$\begin{aligned} \vec{e} &= (2, 1, 1) \\ \vec{n} &= (1, 2, -1) \end{aligned}$$

Kot α med vektorjem \vec{e} in \vec{n} izračunamo s formulo:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{e} \cdot \vec{n}}{|\vec{e}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}. \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{\pi}{3} \\ \Rightarrow \varphi &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

3. [25T] Izračunaj lastne vrednosti matrike A in lastni vektor, ki pripada po absolutni vrednosti največji lastni vrednosti.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 3 \\ 2 & -6 & 3 \\ 2 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

Rešitev:

Lastne vrednosti dobimo kot rešitve enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -7 & 3 \\ 2 & -6 - \lambda & 3 \\ 2 & -8 & 5 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (3 - \lambda)(-6 - \lambda)(5 - \lambda) - 42 - 48 + 6(6 + \lambda) \\ &\quad + 24(3 - \lambda) + 14(5 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 \\ &= -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Lastne vrednosti so torej: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ in $\lambda_3 = -1$.

Po absolutni vrednosti največja lastna vrednost je 2. Izračunajmo še pripadajoči lastni vektor:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \\ 2 & -8 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 2 je torej $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

4. [25T] Analiziraj spodnji sistem enačb glede na parameter a . Če je sistem rešljiv, poišči rešitev.

$$\begin{aligned} ax + 2y - z &= -1 \\ -2x - 4y + 2z &= 2 \\ x + y + z &= -2 \end{aligned}$$

Rešitev:

Izračunajmo najprej rang razširjene matrike koeficientov:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \\ a & 2 & -1 & -1 \end{array} \right] \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 2-a & -1-a & -1+2a \end{array} \right] \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2-a & -1-a & -1+2a \end{array} \right] \\
 & \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3-3a & 3a-3 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Ranga matrike koeficientov in razširjene matrike koeficientov sta vedno enaka. Ko je $a = 1$, je rang = 2 in imamo 1-parametrično družino rešitev, ko pa je $a \neq 1$, je rang = 3 in imamo natanko eno "rešitev.

V primeru $a = 1$ dobimo 1-parametrično družino rešitev:

$$\begin{aligned}
 z &= t, \\
 y &= 2t + 1, \\
 x &= -3t - 3.
 \end{aligned}$$

V primeru $a \neq 1$ dobimo rešitev:

$$\begin{aligned}
 z &= -1, \\
 y &= -1, \\
 x &= 0.
 \end{aligned}$$