

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

5. april 2007

1. [10T] Določi enačbo ravnine Π , ki gre skozi točko $T(2, 3, -1)$ in je pravokotna na ravnini $x + 2y - 3z = 7$ in $-2x - 4y + z = -5$. Za koliko je izhodišče koordinatnega sistema oddaljeno od ravnine Π ?

Rešitev:

Ker je ravnina Π pravokotna na dani ravnini, ležita normali danih ravnin na ravnini Π . Njen vektorski produkt je torej normala ravnine Π .

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= (1, 2, -3) \\ \vec{n}_2 &= (-2, -4, 1)\end{aligned}$$

Vektorski produkt:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (-10, 5, 0).$$

Enačba iskane ravnine Π : $-10x + 5y = -5$, oz. $2x - y = 1$.

Oddaljenost izhodišča:

$$d(O, \Pi) = \frac{|-1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

2. [15T] Izračunaj lastne vrednosti matrike A in lastni vektor, ki pripada po absolutni vrednosti najmanjši lastni vrednosti.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Rešitev:

Lastne vrednosti matrike A dobimo kot rešitve enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 2 \\ -2 & -1 - \lambda & 2 \\ 3 & -3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(1 + \lambda)^2 \lambda - 18 + 12 - 6\lambda + 6(1 + \lambda) + 6(1 + \lambda) \\ &= -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda + 6 \\ &= -(\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 3)\end{aligned}$$

Lastne vrednosti: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ in $\lambda_3 = -3$.

Po absolutni vrednosti najmanjša lastna vrednost je -1 .

Pripadajoči lastni vektor:

$$A + I = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti -1 : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. [15T] Obravnavaj sistem enačb v odvisnosti od parametra k .

$$\begin{aligned}6x + 4y + 7z + 8u &= k \\ x + 3y + 4z + u &= 2 \\ 2x + 2y + 6z + 4u &= -1 \\ 5x + 9y + 3z + u &= 2k\end{aligned}$$

Rešitev:

Izračunajmo rang razširjene matrike koeficientov:

$$\begin{aligned}&\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & -1 \\ 5 & 9 & 3 & 1 & 2k \\ 6 & 4 & 7 & 8 & k \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & -17 & -4 & 2k - 10 \\ 0 & -14 & -17 & 2 & k - 12 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -28 & -14 & 4k - 5 \\ 0 & 0 & -20 & -10 & 2k + 11 \end{array} \right] \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -28 & -14 & 4k - 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6k + 102 \end{array} \right]\end{aligned}$$

Sistem ima rešitev, ko je $-6k + 102 = 0$, torej ko je $k = 17$. Tedaj sta ranga nerazširjene in razširjene matrike koeficientov enaka 3.

V primeru, ko je $k = 17$, dobimo 1-parametrično družino rešitev:

$$\begin{aligned}x &= \frac{5}{2}t + \frac{19}{2}, \\y &= -\frac{3}{2}t - 1, \\z &= t, \\u &= -2t - \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

4. [10T] Določi območje konvergencije potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{3n+2}}.$$

Rešitev:

Konvergenčni radij: ($a_n = \frac{1}{\sqrt{3n+2}}$)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3n+5}{3n+2}} = 1$$

Vrsta konvergira na intervalu $(2, 4)$. Krajišča intervala:

$x = 2$: številska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{3n+2}}$ je alternirajoča; ker je zaporedje

$a_n = \frac{1}{\sqrt{3n+2}}$ padajoče z limito 0, je ta vrsta konvergentna,

$x = 4$: številska vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+2}}$ je oblike $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, kjer je $p \leq 1$, torej je divergentna.

Območje konvergencije: $[2, 4)$.