

1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

5. april 2007

1. [10T] Določi enačbo ravnine Π , ki gre skozi točko $T(1, -2, 3)$ in je pravokotna na ravnini $2x + y - 4z = 5$ in $x + y - 2z = -9$. Za koliko je izhodišče koordinatnega sistema oddaljeno od ravnine Π ?

Rešitev:

Ker je ravnina Π pravokotna na dani ravnini, ležita normali danih ravnin na ravnini Π . Njun vektorski produkt je torej normala ravnine Π .

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 &= (2, 1, -4) \\ \vec{n}_2 &= (1, 1, -2)\end{aligned}$$

Vektorski produkt:

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (2, 0, 1).$$

Enačba iskane ravnine Π : $2x + z = 5$.

Oddaljenost izhodišča:

$$d(O, \Pi) = \frac{|-5|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}.$$

2. [15T] Izračunaj lastne vrednosti matrike A in lastni vektor, ki pripada po absolutni vrednosti najmanjši lastni vrednosti.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -5 & 6 & -3 \\ -5 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Rešitev:

Lastne vrednosti matrike A dobimo kot rešitve enačbe $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 3 & -3 \\ -5 & 6 - \lambda & -3 \\ -5 & 5 & -2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2 - \lambda)^2(6 - \lambda) + 45 + 75 - 15(6 - \lambda) \\ &\quad + 15(-2 - \lambda) + 15(-2 - \lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3)\end{aligned}$$

Lastne vrednosti: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ in $\lambda_3 = 3$.

Po absolutni vrednosti najmanjša lastna vrednost je 1.

Pripadajoči lastni vektor:

$$A - I = \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -5 & 5 & -3 \\ -5 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti 1: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. [15T] Obravnavaj sistem enačb v odvisnosti od parametra k .

$$\begin{aligned}6x + 4y + 7z + 8u &= k \\ x + 3y + 4z + u &= 3 \\ 2x + 2y + 6z + 4u &= -1 \\ 5x + 9y + 3z + u &= 2k\end{aligned}$$

Rešitev:

Izračunajmo rang razširjene matrike koeficientov:

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 & 4 & -1 \\ 5 & 9 & 3 & 1 & 2k \\ 6 & 4 & 7 & 8 & k \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & -6 & -17 & -4 & 2k-15 \\ 0 & -14 & -17 & 2 & k-18 \end{array} \right] \\
 & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -28 & -14 & 4k-9 \\ 0 & 0 & -20 & -10 & 2k+13 \end{array} \right] \\
 & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -28 & -14 & 4k-9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6k+136 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Sistem ima rešitev, ko je $-6k + 136 = 0$, torej ko je $k = \frac{68}{3}$. Tedaj sta ranga nerazširjene in razširjene matrike koeficientov enaka 3.

V primeru, ko je $k = \frac{68}{3}$, dobimo 1-parametrično družino rešitev:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{5}{2}t + \frac{89}{6}, \\
 y &= -\frac{3}{2}t - 2, \\
 z &= t, \\
 u &= -2t - \frac{35}{6}.
 \end{aligned}$$

4. [10T] Določi območje konvergence potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{4n+1}}.$$

Rešitev:

Konvergenčni radij: $(a_n = \frac{1}{\sqrt{4n+1}})$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n+5}{4n+1}} = 1$$

Vrsta konvergira na intervalu $(1, 3)$. Krajišča intervala:

$x = 1$: številna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4n+1}}$ je alternirajoča; ker je zaporedje $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ padajoče z limito 0, je ta vrsta konvergentna,

$x = 3$: številna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$ je oblike $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, kjer je $p \leq 1$, torej je divergentna.

Območje konvergence: $[1, 3)$.