1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

1. april 2009

1. [25T] Dana so oglišča tristrane piramide $A(2,-3,1)$, $B(3,1,-1)$, $C(2,-2,4)$ in $D(-1,1,-3)$. Izračunaj

   a) volumen tristrane piramide ABCD,

   b) ploščino trikotnika ACD,

   c) vektor višine, ki gre skozi oglišče B.

   Rešitev:
   Označimo vektorje:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{AC} = (0,1,3)\\ \vec{b} &= \vec{AD} = (-3,4,-4)\\ \vec{c} &= \vec{AB} = (1,4,-2)\end{aligned}$$

   Izračunamo najprej vektorski produkt:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & -4 \end{vmatrix} = (-16,-9,3)$$

   a) Volumen piramide:

$$V_{pir} = \frac{1}{6}|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})| = \frac{1}{6}|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = \frac{|-58|}{6} = \frac{29}{3}$$

   b) Ploščina trikotnika:

$$p = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{\sqrt{256+81+9}}{2} = \frac{\sqrt{346}}{2}$$

c) Višina na B: ($V_{pir} = \frac{1}{3}pv$)

$$v = \frac{3V_{pir}}{p} = \frac{58}{\sqrt{346}}$$

Višina na B (vektor):

$$\vec{v}_B = \frac{58}{\sqrt{346}} \cdot \frac{(-16,-9,3)}{\sqrt{346}} = \frac{29}{173} \cdot (-16,-9,3)$$

2. [$25T$] Dani sta premici

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{in} \quad \frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{\lambda}, z = 2.$$

Določi

a) parameter λ, da se bosta premici sekali, ter presečišče,

b) kot, pod katerim se premici sekata,

c) enačbo ravnine, v kateri ležita premici.

Resitev:

a) Presečišče:
Najprej zapišemo enačbi premic v parametrični obliki.

$$\begin{aligned} x = 1 + 2t &= -1 - s \\ y = -2 + 3t &= 2 + \lambda s \\ z = 3 - t &= 2 \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je $t = 1$, $s = -4$ in $\lambda = \frac{1}{4}$, kar nam da presečišče v točki $P(3,1,2)$.

b) Kot med premicama: (kot med smernima vektorjema)

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (2,3,-1) \\ \vec{e}_2 &= (-1,\frac{1}{4},0) \end{aligned}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2|} = \frac{-\frac{5}{4}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{\frac{17}{16}}} = -\frac{5}{\sqrt{238}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{238}}\right) = 1.90\text{rad}$$

c) Enačba ravnine:

$$\vec{n} = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & \frac{1}{4} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4}, 1, \frac{7}{2}\right)$$

$$x + 4y + 14z = 35$$

3. [25T] Izračunaj inverzno matriko k matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešitev:
Sestavimo razširjeno matriko in jo preoblikujemo z operacijami, ki ohranjajo rang.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & -2 & 1 & -8 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -13 & -3 & 2 & -16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 3 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & -2 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -13 & -3 & 2 & -16 \\ 6 & 2 & -1 & 7 \\ 11 & 3 & -2 & 13 \\ -7 & -2 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

4. [25T] Obravnavaj spodnji sistem enačb glede na parametra a in b. V primeru, da ima sistem rešitev, jo poišči.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y - 3z &= 2 \\ 3x + y + bz &= a \end{aligned}$$

Rešitev:
Najprej izračunamo rang razširjene matrike koeficientov:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & b & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & b-3 & a-3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & b+1 & a-4 \end{array}\right]$$

Obravnavamo primere:

- $b = -1$, $a \neq 4$: ni rešitve
- $b = -1$, $a = 4$: neskončno rešitev

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} + t \\ y &= -\frac{1}{2} - 2t \\ z &= t \end{aligned}$$

- $b \neq -1$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{2} + \frac{a-4}{b+1} \\ y &= -\frac{1}{2} - 2\frac{a-4}{b+1} \\ z &= \frac{a-4}{b+1} \end{aligned}$$