1. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

8. april 2011

1. [25T] Izračunajte obseg in ploščino paralelograma, ki je napet na vektorja $\vec{a}+2\vec{b}$ in $2\vec{a}-3\vec{b}$, kjer je $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pa je enak $\frac{\pi}{3}$.

   Rešitev:
   Najprej izračunamo dolžini vektorjev $\vec{a}+2\vec{b}$ in $2\vec{a}-3\vec{b}$:

$$\begin{aligned}|\vec{a}+2\vec{b}| &= \sqrt{(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})} = \sqrt{|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2} = 2\sqrt{3},\\ |2\vec{a}-3\vec{b}| &= \sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})} = \sqrt{4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2} = \sqrt{13}.\end{aligned}$$

   Obseg paralelograma:

$$o = 2|\vec{a}+2\vec{b}|+2|2\vec{a}-3\vec{b}| = 4\sqrt{3}+2\sqrt{13}.$$

   Ploščina paralelograma:

$$p = |(\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}-3\vec{b})| = |2\underbrace{\vec{a}\times\vec{a}}_{=0}+4\vec{b}\times\vec{a}-3\vec{a}\times\vec{b}-6\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{=0}| = 7|\vec{a}\times\vec{b}| = 7\sqrt{3}.$$

2. [25T] Dana je ravnina π, ki jo določajo točke $A(1,2,3)$, $B(-1,1,-2)$ in $C(-3,-1,2)$.

   a) Določite enačbo ravnine π.

   b) Določite točko na ravnini π, ki leži najbližje točki $T(9,-6,0)$.

   Rešitev:

   a) Najprej določimo enačbo ravnine. Normala je vektorski produkt dveh vektorjev, ki ležita v ravnini:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{AB} = (-2,-1,-5),\\ \vec{b} &= \vec{AC} = (-4,-3,-1),\\ \vec{n} &= \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -2 & -1 & -5\\ -4 & -3 & -1\end{vmatrix} = (-14,18,2),\\ d &= (-14,18,2)\cdot(1,2,3) = 28.\end{aligned}$$

   Enačba ravnine:

$$-7x+9y+z=14.$$

   b) Iščemo pravokotno projekcijo točke T na ravnino π. Dobimo jo kot presečišče ravnine in premice, ki je pravokotna na ravnino π in gre skozi točko T. Enačba premice v vektorski in parametrični obliki:

$$\vec{r} = (9,-6,0)+t(-7,9,1),$$

$$x = 9-7t, \quad y=-6+9t \quad \text{in} \quad z=t.$$

Vstavimo parameričnо izražavo enačbe premice v enačbo ravnine in dobimo vrednost parametra t:

$$\begin{aligned} -63+49t-54+81t+t &= 14 \\ 131t &= 131 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

Pravokotna projekcija: $S(2,3,1)$.

3. [25T] Obravnavajte sistem enačb glede na parameter a. V primeru, da je sistem rešljiv, poiščite rešitev.

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ 2x+ay+z &= 2 \\ y+z &= -1 \end{aligned}$$

Rešitev:
Najprej izračunamo rang razširjene matrike koeficientov:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & a & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & a-2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & a-6 \end{array}\right]$$

Obravnavamo primere:

- $a=1$: ni rešitve
- $a \neq 1$: natanko ena rešitev

$$x=4, \quad y=\frac{5}{1-a}, \quad z=\frac{a-6}{1-a}$$

4. [25T] Izračunajte lastne vrednosti matrike $A = B \cdot C$, kjer je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad C = \begin{bmatrix} -9 & -4 & -1 \\ 25 & 11 & 4 \\ -12 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiščite še lastni vektor, ki pripada najmanjši lastni vrednosti.

Rešitev:
Najprej izračunamo matriko A:

$$A = B\cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -9 & -4 & -1 \\ 25 & 11 & 4 \\ -12 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Lastne vrednosti matrike A so rešitve enačbe $\det(A-\lambda I)=0$:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-6) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2) = 0$$

Dobimo tri lastne vrednosti matrike A: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ in $\lambda_3 = -2$. Najmanjša lastna vrednost je $\lambda_3 = -2$, za katero izračunamo še lastni vektor:

$$A+2I = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$