

Naloga 1 (25 točk)

Dana je linearna preslikava s predpisom $\tau(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} - A^{-1} \cdot \vec{x}$, kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

A^{-1} pa je inverzna matrika matrike A .

- Poiščite vse lastne vrednosti matrike A .
- Določite matriko T linearne preslikave τ v standardni bazi prostora \mathbb{R}^3 .
- Ali obstaja neničeln vektor \vec{x} , za katerega velja $A\vec{x} = 0$? Odgovor utemeljite.

Naloga 2 (25 točk)

Dana je matrična enačba $AX = B^T X$, kjer sta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Kakšne dimenzije lahko ima matrika X , ki je rešitev dane enačbe? Odgovor utemeljite.
- Poiščite vse realne matrike X dimenzije 2×2 , ki rešijo dano enačbo. Poiščite vsaj eno neničelno matriko druge dimenzije, ki reši enačbo.

Naloga 3 (25 točk)

Točke $A(3, 0, -5)$, $B(1, 2, -1)$, $C(4, 0, 0)$ in $D(3, -1, 0)$ so oglišča tristrane piramide v prostoru \mathbb{R}^3 .

- Izračunajte ploščino trikotnika ABC .
- Izračunajte višino piramide $ABCD$ skozi oglišče D .
- Ali točke A , B in C ležijo na skupni ravnini? Ali točke A , B , C in D ležijo na skupni ravnini? Oba odgovora utemeljite.

Naloga 4 (25 točk)

Dani sta dve ravnini v prostoru \mathbb{R}^3 . Njuni enačbi sta $2x - y - 3 = 0$ in $x + y - 5z = 0$.

- Zapišite enačbo premice, v kateri se dani ravnini sekata. Zapišite tudi smerni vektor te premice in eno točko na njej.
- Katere ravnine imajo z danima ravninama natanko eno skupno točko? Opišite njihovo lego v prostoru.