2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

30. maj 2005

1. [10T] S pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - 2\sin(\frac{x}{2})}{1+2x-e^{2x}}.$$

Rešitev:
Uporabimo razvoje naslednjih funkcij okrog točke 0:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \ldots
\end{aligned}$$

Limita je torej enaka:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - 2\sin(\frac{x}{2})}{1+2x-e^{2x}} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \ldots - 2(\frac{x}{2} - \frac{(\frac{x}{2})^3}{3!} \pm \ldots)}{1+2x-(1+2x+\frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \ldots)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots - x + \frac{x^3}{24} + \ldots}{1 + 2x - 1 - 2x - 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \ldots} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{8} + \ldots}{-2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \ldots} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}}{-2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

2. [10T] Določi in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 + 6xy + 27.$$

Rešitev:
Izračunajmo najprej prve parcialne odvode:

$$\begin{aligned} f_x &= 6x^2 + 6y \\ f_y &= 6y^2 + 6x \end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Torej moramo rešiti sistem:

$$\begin{aligned} 6x^2 + 6y &= 0 \\ 6y^2 + 6x &= 0 \end{aligned}$$

Iz prve enačbe dobimo $y = -x^2$. To vstavimo v drugo enačbo in dobimo $x^4 + x = 0$. To lahko razstavimo in dobimo $x(x+1)(x^2 - x + 1) = 0$. Ta enačba ima dve realni rešitvi, in sicer $x_1 = 0$ in $x_2 = -1$. To nam da $y_1 = 0$ in $y_2 = -1$, kar nam da dve stacionarni točki: $T_1(0,0)$ in $T_2(-1,-1)$.
Izračunajmo sedaj druge parcialne odvode:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 12x \\ f_{yy} &= 12y \\ f_{xy} &= 6. \end{aligned}$$

Torej se Hessejeva matrika funkcije f glasi:

$$Hf = \begin{bmatrix} 12x & 6 \\ 6 & 12y \end{bmatrix}$$

Oglejmo si sedaj determinanto te matrike v obeh stacionarnih točkah.

- $$\det Hf(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$$
  $\Rightarrow$ V točki $T_1(0,0)$ imamo sedlo.
- $$\det Hf(-1,-1) = \begin{vmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} = 108 > 0$$
  $f_{xx}(-1.-1) = -12 < 0$
  $\Rightarrow$ V točki $T_2(-1,-1)$ imamo maksimum.

3. [15T] Poišči rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} y'(x) + y(x)\tan(x) + 2y^2(x)\sin(x) &= 0, \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Rešitev:
Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je Bernoullijeva diferencialna enačba. Najprej jo delimo z y^2, da jo prevedemo v pravilno obliko:

$$y^{-2}y' + y^{-1}\tan(x) + 2\sin(x) = 0.$$

Sedaj uvedemo novo spremenljivko: $z = y^{-1}$ in $z' = -y^{-2}y'$, da dobimo:

$$-z' + z\tan(x) + 2\sin(x) = 0,$$

kar je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

- Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned} z' &= z\tan(x) \\ \int \frac{dz}{z} &= \int \tan x dx \\ \ln z &= -\ln|\cos x| + \ln C \\ z &= \frac{C}{\cos x} \end{aligned}$$

  Pri tem smo upoštevali, da je $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$.

- Nehomogeni del rešimo s pomočjo variacije konstante.

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{C(x)}{\cos x} \\ z'(x) &= \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

  Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$-\frac{C'(x)}{\cos x} - \frac{C(x)}{\cos x}\tan x + \frac{C(x)}{\cos x}\tan x + 2\sin x = 0.$$

  Sledi:

$$\begin{aligned} C'(x) &= 2\sin x\cos x \\ C'(x) &= \sin 2x \\ C(x) &= \int \sin 2x dx \\ C(x) &= -\frac{1}{2}\cos 2x + D \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z(x) = \frac{-\frac{1}{2}\cos 2x + D}{\cos x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{\cos x}{-\frac{1}{2}\cos 2x + D}$$

Upoštevajmo sedaj še začetni pogoj.

$$1 = y(0) = \frac{1}{-\frac{1}{2} + D}$$

$$\Rightarrow D = \frac{3}{2}$$

Rešitev začetnega problema se torej glasi:

$$y(x) = \frac{2\cos x}{3 - \cos 2x}.$$

4. [15T] Poišči rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) &= e^{3x} + 5e^{x}, \\ y(0) &= 4, \\ y'(0) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Rešitev:
Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

- Rešimo najprej homogeni del:

  $$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

  Uporabimo nastavek $y = e^{\lambda x}$ in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$. Ta polinom razstavimo in dobimo $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$, kar nam da dve rešitvi, in sicer $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 2$.
  Homogeni del rešitve se tako glasi:

  $$y_H = Ae^{x} + Be^{2x}$$

- Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka. Za vsak del uporabimo drug nastavek.
  Najprej za e^{3x}: nastavek $y_{p_1} = Ce^{3x}$, odvajamo in dobimo $y'_{p_1} = 3Ce^{3x}$ in $y''_{p_1} = 9Ce^{3x}$. To vstavimo v enačbo:

  $$9Ce^{3x} - 9Ce^{3x} + 2Ce^{3x} = e^{3x}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Dobimo prvi del partikularne rešitve:

$$y_{p_1} = \frac{1}{2}e^{3x}.$$

Nato še za e^x: nastavek $y_{p_2} = Dxe^x$, odvajamo in dobimo $y'_{p_2} = De^x + Dxe^x$ in $y''_{p_2} = 2De^x + Dxe^x$. To vstavimo v enačbo:

$$2De^x + Dxe^x - 3De^x - 3Dxe^x + 2Dxe^x = 5e^x$$

$$\Rightarrow D = -5$$

Dobimo še drugi del partikularne rešitve:

$$y_{p_2} = -5xe^x.$$

$$\Rightarrow y(x) = y_H + y_{p_1} + y_{p_2} = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x} - 5xe^x$$

Iz začetnega pogoja je potrebno izračunati še konstanti A in B. V ta namen odvajamo:

$$y'(x) = Ae^x + 2Be^{2x} + \frac{3}{2}e^{3x} - 5e^x - 5xe^x.$$

Vstavimo začetna pogoja:

$$\begin{aligned} 4 = y(0) &= A + B + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} = y'(0) &= A + 2B + \frac{3}{2} - 5 \end{aligned}$$

Rešitev tega sistema je: $A = 3$ in $B = \frac{1}{2}$.
Rešitev našega začetnega problema je torej:

$$y(x) = 3e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x} - 5xe^x.$$