2. KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE 2

Univerzitetni študij

1. junij 2006

1. [25T] Funkcijo
$$f(x) = \frac{3x+2}{x^2+3x+2}$$
razvij v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 1$.
Rešitev:
Najprej uvedemo novo spremenljivko $y = x - 1$ oz. $x = y + 1$ in zapišemo novo funkcijo
$$g(y) = \frac{3(y+1)+2}{(y+1)^2+3(y+1)+2} = \frac{3y+5}{y^2+5y+6}.$$
To funkcijo sedaj razvijemo v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 0$ z uporabo geometrijske vrste
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$
Najprej razbijemo funkcijo na parcialne ulomke:
$$g(y) = \frac{3y+5}{(y+2)(y+3)} = \frac{A}{y+2} + \frac{B}{y+3} = \frac{(A+B)y+3A+2B}{(y+2)(y+3)}.$$
Dobimo sistem enačb: $A + B = 3$ in $3A + 2B = 5$, ki ima rešitev $A = -1$ in $B = 4$. Dalje je
$$\begin{aligned}
g(y) &= \frac{-1}{y+2} + \frac{4}{y+3} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{y}{2})} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{y}{3})} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{y}{2})^n + \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{y}{3})^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{4}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) y^n
\end{aligned}$$

Vstavimo obratno substitucijo in dobimo razvoj funkcije $f(x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke $a = 1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4}{3^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) (x-1)^n$$

2. [25T] Poišči in klasificiraj lokalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = y^3 + x^2 - 6xy + 3x + 6y + 12.$$

Rešitev:
Izračunajmo najprej prve parcialne odvode:

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - 6y + 3, \\ f_y &= 3y^2 - 6x + 6. \end{aligned}$$

Stacionarne točke dobimo tam, kjer sta oba prva parcialna odvoda enaka 0. Torej moramo rešiti sistem:

$$\begin{aligned} 2x - 6y + 3 &= 0, \\ 3y^2 - 6x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Prvo enačbo množimo s 3 in enačbi seštejemo. Po deljenju te enačbe s 3 dobimo kvadratno enačbo: $y^2 - 6y + 5 = 0$. To razstavimo in dobimo $(y-1)(y-5) = 0$. Ta enačba ima dve realni rešitvi, in sicer $y_1 = 1$ in $y_2 = 5$. To nam da $x_1 = \frac{3}{2}$ in $x_2 = \frac{27}{2}$, kar nam da dve stacionarni točki: $T_1\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ in $T_2\left(\frac{27}{2}, 5\right)$.
Izračunajmo še druge parcialne odvode:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2, \\ f_{yy} &= 6y, \\ f_{xy} &= -6. \end{aligned}$$

Hessejeva matrika funkcije f je torej:

$$Hf = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6y \end{bmatrix}.$$

Izračunajmo determinanto te matrike v obeh stacionarnih točkah.

- $$\det Hf\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = -24 < 0$$

  $\Rightarrow$ V točki $T_1\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ imamo sedlo.

- $$\det Hf\left(\frac{27}{2},5\right)=\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 30 \end{vmatrix}=24>0$$

  $f_{xx}\left(\frac{27}{2},5\right)=2>0$
  $\Rightarrow$ V točki $T_2\left(\frac{27}{2},5\right)$ imamo lokalni minimum.

3. [25T] Poišči rešitev začetnega problema

$$\begin{aligned} y'(x)+\frac{y(x)}{x} &= y^2(x)\ln x, \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

Rešitev:
Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je Bernoullijeva diferencialna enačba ($\alpha=2$). Najprej jo delimo z $y^\alpha=y^2$, da jo prevedemo v pravilno obliko:

$$y^{-2}y'+\frac{y^{-1}}{x}=\ln x.$$

Sedaj uvedemo novo spremenljivko: $z=y^{1-\alpha}=y^{-1}$ in $z'=-y^{-2}y'$, da dobimo:

$$-z'+\frac{z}{x}=\ln x,$$

kar je nehomogena linearna diferencialna enačba prvega reda.

- Najprej rešimo homogeni del.

$$\begin{aligned} z' &= \frac{z}{x} \\ \int\frac{dz}{z} &= \int\frac{dx}{x} \\ \ln z &= \ln x+\ln C \\ z &= Cx \end{aligned}$$

- Nehomogeni del rešimo s pomočjo variacije konstante.

$$\begin{aligned} z(x) &= C(x)x \\ z'(x) &= C'(x)x+C(x) \end{aligned}$$

  Vstavimo v enačbo in dobimo:

$$-C'(x)x-C(x)+\frac{C(x)x}{x}=\ln x.$$

Sledi:

$$\begin{aligned} C'(x) &= -\frac{\ln x}{x} \\ C(x) &= -\int \frac{\ln x}{x} dx \\ C(x) &= -\frac{1}{2}\ln^2 x + D \end{aligned}$$

Tu smo integral izračunali s pomočjo pravila per partes ($u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$, $dv = \frac{dx}{x}$, $v = \ln x$):

$$I = \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln^2 x - I$$

Torej je:

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + \text{konst.}$$

Dobili smo rešitev linearne enačbe:

$$z(x) = -\frac{1}{2} x \ln^2 x + Dx.$$

Sledi rešitev Bernoullijeve enačbe:

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{2} x \ln^2 x + Dx}.$$

Upoštevajmo sedaj še začetni pogoj.

$$1 = y(1) = \frac{1}{-\frac{1}{2}\ln^2 1 + D}$$

$$\Rightarrow D = 1 \quad (\text{ker je } \ln 1 = 0).$$

Rešitev začetnega problema se torej glasi:

$$y(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2} x \ln^2 x + x}.$$

4. [25T] Reši diferencialno enačbo

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 6e^{3x}.$$

Rešitev:
Diferencialna enačba, ki jo moramo rešiti je nehomogena linearna diferencialna enačba drugega reda s konstantnimi koeficienti.

- Rešimo najprej homogeni del:

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0.$$

Uporabimo nastavek $y = e^{\lambda x}$, ga dvakrat odvajamo, vstavimo vse v enačbo in dobimo karakteristični polinom $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$. Ta polinom razstavimo in dobimo $(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$, kar nam da dve rešitvi, in sicer $\lambda_1 = -2$ in $\lambda_2 = -3$.
Homogeni del rešitve je tako:

$$y_H = Ae^{-2x} + Be^{-3x}.$$

- Partikularno rešitev dobimo s pomočjo nastavka: $y_p = Ce^{3x}$. Odvajamo in dobimo $y_p' = 3Ce^{3x}$ in $y_p'' = 9Ce^{3x}$. To vstavimo v enačbo:

$$9Ce^{3x} + 15Ce^{3x} + 6Ce^{3x} = 6e^{3x}$$
$$\Rightarrow C = \frac{1}{5}.$$

Dobimo partikularno rešitev:

$$y_p = \frac{1}{5}e^{3x}.$$

Rešitev diferencialne enačbe je:

$$y(x) = y_H + y_p = Ae^{-2x} + Be^{-3x} + \frac{1}{5}e^{3x}.$$